

EN F 440

# PERIODICA POLYTECHNICA

**ELECTRICAL ENGINEERING — ELEKTROTECHNIK**

VOL. 2 \* NO. 2 \* 1958

1958 JUN 17



---

POLYTECHNICAL UNIVERSITY  
TECHNISCHE UNIVERSITÄT  
BUDAPEST

## PERIODICA POLYTECHNICA

Contributions to international technical sciences published by the Polytechnical University, Budapest (Hungary)

Originalbeiträge zur internationalen technischen Wissenschaft, veröffentlicht von der Technischen Universität, Budapest (Ungarn)

## PERIODICA POLYTECHNICA

includes the following series

enthält folgende Serien

*Engineering*  
*Electrical Engineering*  
*including Applied Physics*  
*Chemical Engineering*

*Maschinen- und Bauwesen*  
*Elektrotechnik und angewandte Physik*  
*Chemisches Ingenieurwesen*

The issues of each series appear at quarterly intervals

Einzelnummern der genannten Serien erscheinen vierteljährlich

---

CHAIRMAN OF THE EDITORIAL BOARD — HAUPTSCHRIFTLEITER

**Z. CSÜRÖS**

EDITORIAL BOARD — SCHRIFTLEITUNG

**I. BARTA, O. BENEDIKT, S. BORBÉLY, L. GILLEMOT, P. COMBÁS, L. HELLER,  
K. P. KOVÁCS, J. PROSZT, G. SCHAY, I. VÖRÖS**

EXECUTIVE EDITOR — SCHRIFTLEITER

**J. KLÁR**

---

*The rate of subscription to a series is \$ 4,00 a year. For subscription or exchange copies please write to*

*Jahresabonnement pro Serie: \$ 4,00. Bestellungen und Anträge für Tauschverbindungen sind zu richten an:*

## PERIODICA POLYTECHNICA

BUDAPEST, XI. 62, POSTAFIÓK 440



# DIE NEUE ELEKTRISCHE MASCHINE »AUTODYNE«

O. BENEDIKT

Lehrstuhl für spezielle elektrische Maschinen an der Technischen Universität, Budapest

(Eingegangen am 3. Januar 1958)

## 1. Die bisherigen Versuche der Ersetzung des Motorgenerators durch einen Einankerumformer

### *a) Die Bedeutung des Problems*

Auf vielen Gebieten der Technik verwendet man zur Gleichstromerzeugung Motorgeneratoren, die ihre Gleichspannung in breiten Grenzen ändern können. Allerdings haben sie große Nachteile, wie z. B. große Dimensionen und hohes Gewicht, beträchtliche Leistungsverluste und den Umstand, daß die mechanische Leistung durch eine Welle übertragen werden muß. Wenn man eine Asynchronmaschine als Motor verwendet, kommt zu diesen Nachteilen noch ein relativ niedriger Leistungsfaktor hinzu, hauptsächlich bei Teillast, und auch der Umstand, daß bei Stoßbelastungen sich die Drehzahl stark verringert und sogar die Möglichkeit des Kippens eintreten kann.

Bekanntlich weisen die Einankerumformer diese Nachteile nicht auf. Sie haben nur ein einziges Magnetsystem und formen den Wechselstrom in Gleichstrom unmittelbar in einer einzigen Ankerwicklung um, die elektrisch mit einem Stromwender verbunden ist. Hierbei ist in dieser Wicklung der Wechselstrom dem Gleichstrom entgegengesetzt gerichtet, was zur Folge hat, daß Gewicht, Dimensionen und Leistungsverluste wesentlich kleiner werden. Auch kann der Einankerumformer mit einem Leistungsfaktor gleich eins oder sogar mit voreilem Strom arbeiten. Schließlich wird die Leistung nicht durch die Welle übertragen.

Noch größere Vorteile könnten die Einankerumformer haben, wenn sie solche Maschinengruppen ersetzen könnten, die aus mehreren, auf einer einzigen Welle montierten Gleichstromgeneratoren bestehen, die von einem Gleichstrommotor angetrieben werden. In diesen Fällen, wie z. B. bei Exkavatoren, vergrößern sich die Dimensionen des ganzen Mechanismus sehr stark wegen der ausgedehnten Länge der Maschinengruppe; wenn man dagegen letztere durch mehrere Einankerumformer ersetzen könnte, die an verschiedenen Stellen angeordnet sein mögen, ergibt sich die Möglichkeit, den ganzen Mechanismus wesentlich kleiner zu gestalten.

Trotz der geschilderten Vorteile der Einankerumformer konnten sie lange Zeit hindurch nicht als Ersatz von Motorgeneratoren angewendet wer-

den, weil der gewöhnliche Einankerumformer nicht erlaubt, die Gleichspannung in breiten Grenzen zu regeln.

In dieser Maschine induziert ein und derselbe magnetische Erregerfluß  $\Phi'$  (Abb. 1) in der Gleichstromwicklung 1 eine Gleichspannung und in den drei Phasen derselben Wicklung

$$a - b, b - c, c - a$$

eine Wechselspannung. Deshalb müssen die genannten Spannungen zueinander proportional sein.

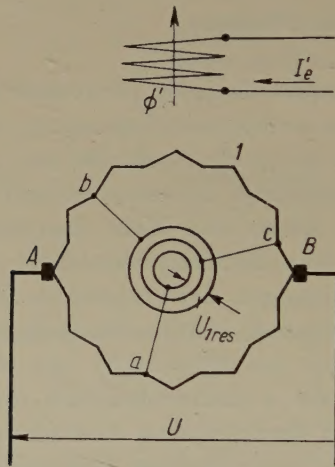


Abb. 1

Da den magnetischen Fluß  $\Phi'$  eine Erregerwicklung hervorruft, die vom Strom  $I'_e$  durchflossen wird und im gewöhnlichen Einankerumformer in der Richtung der Längsachse angeordnet ist, wirkt die innere Gleichspannung längs der Querachse der Maschine zwischen den Bürsten  $A$  und  $B$ . Die induzierte Spannung der Wechselstromseite ist ungefähr gleich der Netzspannung  $U_{1res}$ . Die induzierte Spannung der Gleichstromseite ist beiläufig gleich der Spannung  $U$ . Daraus folgt, daß die Gleichspannung  $U$  zwischen den Bürsten  $A - B$  praktisch proportional der Netzspannung  $U_{1res}$  und daher nicht regelbar ist.

Das Problem der Ersetzung des Motorgenerators durch einen Einankerumformer ist so wichtig, daß schon seit mehreren Jahrzehnten auf verschiedenen Wegen versucht wird, die Gleichspannung des letzteren regelbar zu machen. Von diesen Wegen seien im folgenden jene drei voneinander grundverschiedenen erläutert, die, wenn sie auch keineswegs eine Lösung gebracht haben, doch zweifellos als sehr interessant betrachtet werden müssen.



## b) K. Schenfers Vorschlag

Den einen Weg wies K. SCHENFER, der im Jahre 1928 vorschlug, die Gleichspannung des Einankerumformers auf folgende originelle Weise innerhalb von breiten Grenzen zu regeln. Seinem Vorschlag gemäß besaß der Ständer der Maschine zwei Erregerwicklungen, welche längs zweier aufeinander senkrechter Achsen wirkten. Durch die Änderung der Durchflutung jeder dieser Wicklungen konnte man die räumliche Lage des aus einer Längs- und einer Querkomponente bestehenden, magnetischen Flusses ändern. Der resultierende Fluß ist hierbei in jeder beliebigen Lage praktisch konstant, da die durch ihn induzierte Phasenspannung der gegebenen Netzspannung das Gleichgewicht halten muß. Daraus folgt, daß sich die Längskomponente des Erregerflusses bei Vergrößerung der Querkomponente entsprechend verkleinert und infolgedessen auch die zwischen den unbeweglichen Bürsten induzierte Gleichspannung. Bei Anwendung des von K. SCHENFER vorgeschlagenen Regelprinzips wurde es also möglich, zwischen den Bürsten des Einankerumformers eine innerhalb der Werte  $+U_{\max}$  und  $-U_{\max}$  stufenlos regelbare Spannung zu erhalten.

Es ist nicht schwer einzusehen, daß das auf diesem Prinzip beruhende Schaltungsschema — welches im weiteren »allgemeines Schaltungsschema des Einankerumformers« genannt werden wird — den allgemeinen Fall dieser Maschinenart darstellt, während der in Abb. 1 gezeigte »gewöhnliche« Einankerumformer einen Einzelfall zeigt, in welchem die Querkomponente des resultierenden magnetischen Flusses fehlt.

Daß das oben erläuterte Prinzip tatsächlich die stufenlose Regelbarkeit der Gleichspannung eines Einankerumformers ermöglicht, sei an einem Ausführungsbeispiel erläutert, mit dessen Hilfe wir gleichzeitig auch bestimmte, im weiteren häufig verwendete Grundbegriffe klären wollen.

Es sei angenommen, daß von den beiden oben erwähnten Erregerwicklungen die eine in der Längsachse und die andere in der Querachse der Maschine wirkt (Abb. 2a).

Der Einfachheit halber werden wir annehmen, daß die Maschine eine in allen Richtungen gleichmäßige magnetische Leitfähigkeit hat, sich im Zustand des Leerlaufes befindet und vernachlässigbare Kupfer- und Eisenverluste besitzt.

Außerdem vernachlässigen wir alle inneren Drehmomente, wie beispielsweise das Reibungsmoment. Abb. 2a stellt das Schema einer solchen Maschine dar, wobei die Schleifringe, die zur Speisung des Ankers mit Dreiphasenstrom dienen, nicht gezeigt sind. Die durch den Erregerstrom  $I'_e$  hervorgerufene vertikale Durchflutung  $\Theta'_e$  und die durch den Erregerstrom  $I_e$  bewirkte horizontale Durchflutung  $\Theta_e$  erzeugen zusammen einen Fluß, dessen räumliche Grundwelle  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  mit der Vertikalachse der Maschine den Winkel  $\beta$  bildet.

Dieser Fluß induziert im Anker die Spannung  $\bar{E}_{1\text{res}}$ , welche ihm um einen zeitlichen Winkel von  $90^\circ$  voreilt (Abb. 2b).

Hier, wie auch im weiteren, wo Statordurchflutungen prinzipiell, d. h. ohne Bezug auf ihre konkrete Anordnung auf Polen, dargestellt sind, entspricht die Größe  $\Theta$  der Durchflutung pro Pol.

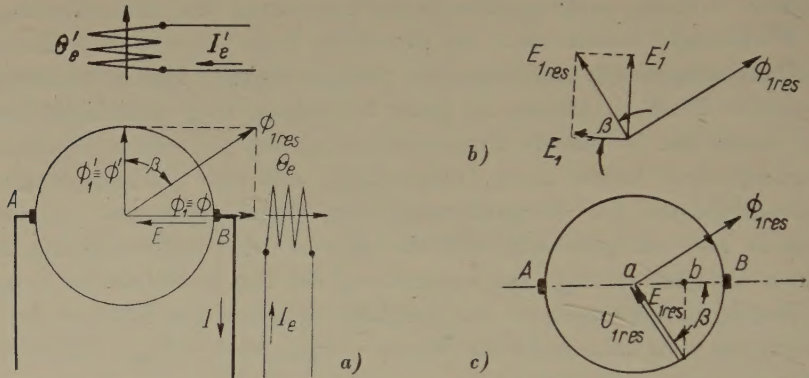


Abb. 2

Zerlegen wir den Fluß  $\Phi_{1\text{res}}$  (Abb. 2a) in die Komponente

$$\Phi'_1 = \Phi_{1\text{res}} \cos \beta, \quad (1)$$

die längs der vertikalen Achse der Maschine wirkt, und in die Komponente

$$\Phi_1 = \Phi_{1\text{res}} \sin \beta, \quad (2)$$

welche längs der Querachse der Maschine wirkt. Hierbei ist  $\Phi'_1$  die räumliche Grundwelle des wirklichen Längsflusses  $\Phi'$  und  $\Phi_1$  die räumliche Grundwelle des wirklichen Querflusses  $\Phi$ .

Der magnetische Fluß  $\Phi'$  induziert zwischen den Bürsten A und B die Gleichspannung  $E$ . Daraus folgt, wenn wir die Konstanz der Drehgeschwindigkeit des Ankers berücksichtigen, daß

$$E \sim \Phi'.$$

Da die Größen  $\frac{\Phi}{\Phi_1}$  und  $\frac{\Phi'}{\Phi'_1}$  praktisch nur von der Konfiguration der Maschine abhängen und deshalb konstant sind und da  $\Phi_{1\text{res}}$  und  $E_{1\text{res}}$  zueinander proportional sind, erhalten wir

$$E = c_1 E_{1\text{res}} \cdot \cos \beta, \quad (3)$$



wo  $c_1$  ein Proportionalitätskoeffizient ist. Wenn  $\beta = 0$ , ist

$$E_0 = E_{\max} = c_1 E_{1\text{res}}. \quad (4)$$

Daraus folgt, daß

$$E = E_{\max} \cdot \cos \beta. \quad (5)$$

Wenn man im Diagramm der zeitlichen, sich auf eine Phase beziehenden Vektoren, den Vektor  $E_{1\text{res}}$  in die Komponenten

$$E_1 = E_{1\text{res}} \cdot \cos \beta \quad (6)$$

und

$$E'_1 = E_{1\text{res}} \cdot \sin \beta \quad (7)$$

zerlegt, so erhält man aus (3) und (6), daß

$$E = c_1 E_1. \quad (8)$$

Hierbei ergibt sich, daß der Winkel zwischen der Richtung der Querachse der Bürsten  $A$  und  $B$ , längs derer  $E$  wirkt, und der räumlichen Richtung des Flusses  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  dieselbe Größe  $90^\circ - \beta$  besitzt wie der Winkel zwischen den zeitlichen Vektoren  $\bar{E}_1$  und  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$ .

Daraus folgt, daß wenn man das Diagramm der zeitlichen Phasenvektoren (Abb. 2b) in der Lage zeichnet, in welcher der Vektor  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  dem Vektor  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  (Abb. 2a) parallel ist, wir das Resultat erhalten, daß die Richtung der Spannung  $E$  in Abb. 2a mit der Richtung des Vektors  $\bar{E}_1$  in Abb. 2b zusammenfällt.

Um möglichst anschauliche Resultate zu bekommen, werden wir im weiteren folgende Methode anwenden. Anstatt die Figuren 2a und 2b einzeln darzustellen, vereinigen wir sie in eine einzige, wie es die Abb. 2c zeigt, indem wir den Vektor  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  der räumlichen Grundwelle des Magnetflusses gleichzeitig auch als zeitlichen Vektor  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  des Flusses benutzen, der in der Phasenumwicklung die Spannung  $\bar{E}_{1\text{res}}$  induziert. Bei dieser Methode bildet der Vektor der Spannung  $\bar{E}_{1\text{res}}$  mit der Achse der Bürsten  $A$  und  $B$  den Winkel  $\beta$ . Hierbei erhalten wir eine sehr anschauliche Darstellung des Einflusses der räumlichen Lage des Vektors  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  auf die Größe  $E$ , da  $\bar{E}_{1\text{res}}$  senkrecht zum Vektor  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  ist, während die Größe  $E$  der Projektion  $a - b$  des Vektors  $\bar{E}_{1\text{res}}$  auf die Horizontalachse der Bürsten  $A$  und  $B$  proportional ist.

Laut der angewandten Methode müssen wir auch alle übrigen zeitlichen Phasenvektoren mit dem allgemeinen Vektordiagramm in Übereinstimmung bringen, wobei ihre Lage durch ihre relative Lage im Vergleich zu den zeitlichen Vektoren  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  und  $\bar{E}_{1\text{res}}$  bestimmt wird. Zum Beispiel nimmt der Vektor der Phasennetzspannung  $\bar{U}_{1\text{res}}$ , der bei der von uns vereinbarten Verein-

fachung dem Vektor der Spannung  $\bar{E}_{1\text{ res}}$  das Gleichgewicht hält, eine Lage ein, die mit der des Vektors  $\bar{E}_{1\text{ res}}$  zusammenfällt, wobei die Größen der genannten Vektoren einander gleich sind.

Der Einfachheit halber wurde angenommen, daß nach der Zusammenlegung (Abb. 2c) die positiven Richtungen der Vektoren  $\bar{\Phi}_1$  und  $\bar{E}_1$  dieselben sind wie vor der Zusammenlegung (Abb. 2a und 2b). Daher ist  $+\bar{\Phi}_1$  (und mithin auch der Fluss  $\Phi$ ) von links nach rechts gerichtet, während  $+\bar{E}_1$  (und daher auch die Spannung  $E$ ) umgekehrte Richtung zeigen. Die positiven Richtungen von  $\bar{\Phi}'_1$  und von  $\bar{E}'_1$  fallen zusammen.

Abb. 2c zeigt in anschaulicher Weise, daß die Anordnung gemäß Abb. 2a tatsächlich geeignet ist, die Gleichspannung des Einankerumformers innerhalb eines breiten Bereiches stufenlos zu regeln, und veranschaulicht auch die Grenzen dieses Bereiches. Wenn wir das gegenseitige Verhältnis der Ströme  $I'_e$  und  $I_e$  derart ändern, daß die Flüsse  $\Phi'_1$  und  $\Phi'$  gleichzeitig den Gleichungen (1) und (2) entsprechen, dreht sich demgemäß im Raume der Vektor  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$  und mit ihm laut Abb. 2c die Vektoren  $\bar{E}_{1\text{ res}}$  und  $\bar{U}_{1\text{ res}}$ , wobei die Gleichspannung proportional zur Strecke  $a - b$  ist. Da der Punkt  $b$  längs des die beiden Bürsten  $A$  und  $B$  verbindenden Durchmessers jede mögliche Lage einnehmen kann, sehen wir, daß die Gleichspannung  $E$  stufenlos von einem Wert  $+E_{\text{max}}$  (bei  $\beta = 0$ ) über 0 (bei  $\beta = 90^\circ$ ) bis  $-E_{\text{max}}$  (bei  $\beta = 180^\circ$ ) geregelt werden kann.

### c) Die beiden Vorschläge Mellers

Einen prinzipiell vollkommen anderen Weg wies MELLER im Jahre 1926 in zwei Artikeln (E. u. M. 1926 Heft 9 und Heft 37). Im weiteren sei seine Grundidee anhand der oben festgelegten Methode erläutert.

Nehmen wir an, daß die Erregerwicklung des Ständers in Abb. 1 entfernt ist. In diesem Falle wirkt der über die Schleifringe 1, 2, 3 gespeiste Läufer 4 des Einankerumformers  $EU$  (Abb. 3) wie eine dreiphasige Drosselspule, und der Fluß  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$ , der die der Netzspannung  $\bar{U}_{1\text{ res}}$  das Gleichgewicht haltende Spannung  $\bar{E}_{1\text{ res}}$  induziert, wird durch einen aus dem Netz entnommenen magnetisierenden Läuferstrom  $\bar{I}_{m\text{ res}}$  erregt. Wenn der Läufer — ebenso wie gemäß Abb. 1 und 2 — synchron läuft, steht der Fluß im Raume still, was zur Folge hat, daß auch die zwischen den Bürsten  $A$  und  $B$  entstehende Gleichspannung (s. auch Abb. 2c) konstant bleibt. Gehen wir des weiteren von denselben vereinfachenden Voraussetzungen aus wie in bezug auf Abb. 2, so ergibt sich, daß der Fluß  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$  jede beliebige Richtung im Raume einnehmen kann, was — wie wir weiter oben sahen — bedeutet, daß sich die Gleichspannung innerhalb der Grenzen  $\pm E_{\text{max}}$  ändern kann. Es entsteht aber



das Problem, was den Läufer zwingt, synchron zu laufen und ihn daran hindert, den Lauf zu verlangsamen oder zu beschleunigen. Im Falle der Maschine gemäß Abb. 2 ist dies die resultierende Ständererregung, die den Fluß  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  zwingt, sich in derselben Richtung einzustellen und in ihr zu verbleiben. Im Falle der Maschine *EU* in Abb. 3 fehlt aber diese Richtkraft.

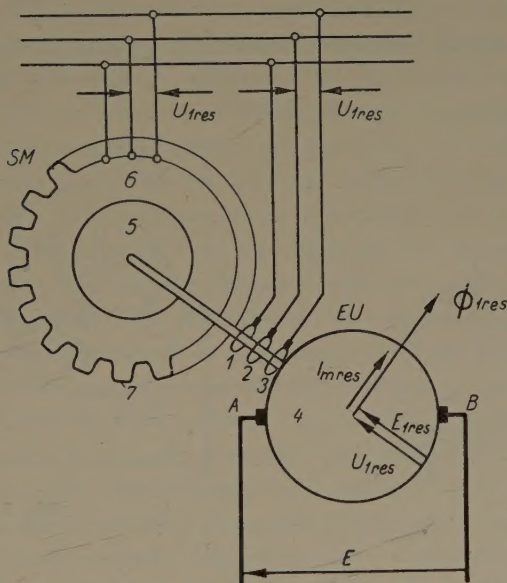


Abb. 3

MELLER versuchte, dieses Problem durch Verwendung einer besonderen, mit *EU* mechanisch gekoppelten Synchronmaschine *SM* zu lösen.

In der Tat, wenn wir dieselben vereinfachenden Verhältnisse annehmen wie für die Maschine *EU*, dann ergibt sich, daß die vom Läuferstrom erzeugte Erregung  $\bar{\Theta}_L$  (Abb. 4) um  $90^\circ$  der Spannung nacheilt, die vom Ständerstrom erzeugte Erregung  $\bar{\Theta}_{st}$  ihr um  $90^\circ$  voreilt und ihre Differenz  $\bar{\Theta}_\phi$  den Erregerfluß erzeugt, der die der Netzspannung  $\bar{U}_{1\text{res}}$  das Gleichgewicht haltende innere Spannung induziert. Würden sich die beiden miteinander gekoppelten Läufer 4 und 5 verlangsamen oder beschleunigen, würde in *SM* ein Drehmoment entstehen, welches die Läufer wieder in Synchronismus bringen würde.

Jetzt blieb MELLER noch die Frage zu lösen, auf welche Weise unter solchen Umständen die Drehung des Flusses  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  erzielt werden kann, ohne die eine Regelung der Gleichspannung nicht möglich ist. Zu diesem Zweck schlug er vor, den Stator 6 der Synchronmaschine (z. B. mit Hilfe des Zahnkranzes 7) verdrehbar auszugestalten, wie dies in Abb. 3 schematisch dargestellt ist.

Wenn wir den Stator verdrehen, verdrehen sich mit ihm auch die Vektoren  $\bar{U}_{1res}$ ,  $\bar{\Theta}_{st}$  und  $\bar{\Theta}_{\phi}$  in Abb. 4, wodurch die Läufer 4 und 5 gezwungen sind, sich so lange zu drehen, bis der Vektor  $\bar{\Theta}_L$  mit der neuen Richtung von  $\bar{\Theta}_{\phi}$  zusammenfällt. Solcherart erzielte MELLER denselben Effekt durch mechanische Mittel, wie SCHENFER auf elektrische Weise.

Einen weiteren möglichen Weg zur stufenlosen Regelung der Gleichspannung wies ebenfalls MELLER im bereits erwähnten Artikel. Um die von ihm vorgeschlagene Schaltung zu verstehen, wollen wir das Problem zuerst im allgemeinen stellen.

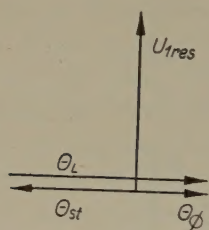


Abb. 4

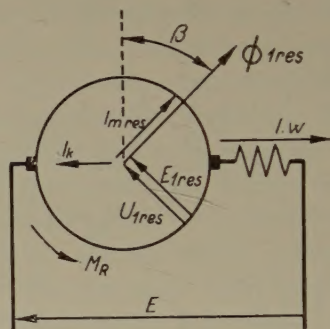


Abb. 5

Nehmen wir an, daß die Maschine  $EU$  gemäß Abb. 3 von der Synchronmaschine  $SM$  abgeschaltet wird. Trotzdem wird sie — da wir ja angenommen haben, daß sämtliche inneren Drehmomente, wie z. B. das durch die Reibung erzeugte, vernachlässigt werden können — synchron weiter laufen. Ganz anders steht aber die Sache, wenn wir das Reibungsmoment  $M_R$  berücksichtigen. Da es der Drehrichtung entgegengesetzt ist, wirkt es bremsend und ist bestrebt, den Fluß  $\bar{\Phi}_{1res}$  gegen den Uhrzeigersinn zu verdrehen. Diese Drehung kann aber verhindert werden, wenn wir in der Querachse eine rechtsgerichtete Durchflutung  $I_w$  anbringen (Abb. 5), die mit der Längskomponente  $\bar{\Phi}'_1$  des Flusses  $\bar{\Phi}_{1res}$  ein  $M_R$  entgegengesetztes und gleich großes Drehmoment erzeugt. Das Gleichgewicht stellt sich ein, wenn

$$M_R = c \Phi'_1 I_w, \quad (9)$$

wobei  $c$  konstant ist. Hiermit erhalten wir bei Berücksichtigung der Gleichungen (3), (1) und (9), daß

$$E = c_1 E_{1res} \cdot \cos \beta = c_1 E_{1res} \frac{\Phi'_1}{\Phi_{1res}} = \frac{c_1 E_{1res} M_R}{\Phi_{1res} \cdot c \cdot I_w}. \quad (10)$$



Wir sehen also, daß auf diese Weise  $E$  durch Änderung des Stromes  $I$  stufenlos geregelt werden kann. Als einen solchen Strom verwendete MELLER den Belastungsstrom, wie in Abb. 5 gezeigt, um dadurch der Volt-Amperekennlinie eine hyperbolische Form zu geben.

#### *d) Kritische Untersuchung der erwähnten drei Vorschläge*

Von den drei oben erläuterten Vorschlägen hat sich wegen der mit ihnen verbundenen Nachteile praktisch keiner durchgesetzt. Wir wollen die Ursachen dieser Tatsache untersuchen, da es nur auf dieser Grundlage möglich ist, sämtliche auftretenden Schwierigkeiten zu erkennen und den richtigen Weg zu weisen, auf dem es gelingen kann, das Problem der Ersetzung des Motor-generators durch einen Einankerumformer vollständig zu lösen.

Betrachten wir zuerst die Nachteile der Anordnung gemäß Abb. 3. Hier ist vor allem der Umstand zu erwähnen, daß die Antriebs-Synchronmaschine dem Anschein nach zwar nur für die Reibungsleistung aufzukommen hat, in Wirklichkeit aber für weit größere Dimensionen ausgelegt werden muß. Man darf nämlich nicht vergessen, daß der Einankerumformer wie jede Synchronmaschine zur Aufrechterhaltung des stabilen Laufes des Auftretens genügend großer synchronisierender Momente bedarf, die bei einem eventuellen Abweichen vom Synchronismus den letzteren wiederherzustellen suchen. In den Maschinen gemäß Abb. 1 und 2 entstehen diese Momente durch das Zusammenwirken der Erregerdurchflutungen im Ständer und von Ausgleichsströmen im Läufer. Im Falle gemäß Abb. 3 entstehen hingegen im Einankerumformer beim Abweichen vom Synchronismus keine synchronisierenden Momente, da ja die Ständerwicklungen fehlen. Der stabile Lauf kann also nur durch die synchronisierenden Momente der Maschine  $SM$  aufrechterhalten werden. Diese können aber der Scheinleistung der Maschine proportional angenommen werden. Daraus folgt, daß die Maschine  $SM$  sehr stark überdimensioniert werden muß und daß sie trotzdem nicht den Stabilitätsgrad eines Einankerumformers erreichen kann, da sie ja nicht nur die Trägheit des eigenen Läufers zu überwinden hat, sondern auch die des Läufers der Maschine  $EU$ . Auf diese Weise verliert der Einankerumformer seinen größten Vorteil gegenüber dem Motorgenerator und zwar den, daß er nur aus einer einzigen Maschine besteht.

Ein weiterer großer Nachteil der Anordnung gemäß Abb. 3 besteht offensichtlich darin, daß der Ständer der Maschine  $SM$  mechanisch verdreht werden muß.

Ferner ist auch leicht einzusehen, daß in der Maschine  $EU$  große Kommutationschwierigkeiten auftreten müssen, da ja der Querfluß  $\Phi_1$  offenbar teilweise durch die Kommutationszone geht.

Schließlich führt das Vorhandensein eines aus dem Drehstromnetz entnommenen Magnetisierungsstromes einerseits zu einer Verschlechterung des Leistungsfaktors und andererseits aus thermischen Gründen zur Verringerung des zulässigen Belastungsstromes.

Auch bei der Anordnung gemäß Abb. 5 ist die Synchronisierung nicht genügend gesichert. Zwar besitzt sie eine Ständerdurchflutung, doch ist diese unvergleichlich geringer als die Erregerdurchflutungen gemäß Abb. 1 oder 2, da sie ja zum Unterschied von den letzteren nicht der durchgehenden Leistung, sondern nur der Reibungsleistung entsprechend berechnet ist.

Die Anordnung gemäß Abb. 5 weist aber nicht nur in dynamischer Beziehung, sondern auch vom Standpunkt der Betriebseigenschaften große Nachteile auf. Wie Gleichung (10) zeigt, ist das Verhältnis zwischen Spannung  $E$  und Belastungsstrom  $I$  bei bestimmtem Reibungsmoment gegeben, d. h. die Maschine hat nur eine einzige Volt-Ampere Kennlinie, während mit Hilfe eines Motorgenerators bei gegebenem Belastungsstrom die Spannung stufenlos geregelt werden kann. Ferner ist zu bedenken, daß das Reibungsmoment keine konstante Größe, sondern beträchtlichen Schwankungen unterworfen ist, woraus folgt, daß sogar die erwähnte einzige Kennlinie in Wirklichkeit keine Linie, sondern einen ziemlich breiten Streifen darstellt. Wir sehen also, daß die Maschine gemäß Abb. 5 schon in bezug auf ihr normales Betriebsverhalten mit dem Motorgenerator nicht konkurrieren kann.

Aus den obigen Erläuterungen geht hervor, daß von den drei erwähnten Wegen zur Lösung des Problems der stufenlosen Spannungsregelung, der gemäß Abb. 2 noch als der beste erscheint. Diese Anordnung bedarf keines Hilfsmotors, besitzt Ständererregerdurchflutungen derselben Größenordnung wie im gewöhnlichen Einankerumformer (Abb. 1) und daher auch ebenso große synchronisierende Momente und schließlich nimmt ihr Läufer keinen Magnetisierungsstrom auf.

Daß trotz alledem auch die Anordnung gemäß Abb. 2 keine praktische Anwendung fand und sich gegen den Motorgenerator nicht durchsetzen konnte, hat wohl folgende drei Hauptursachen:

1. Die zwischen den Bürsten bei einem bestimmten Winkel  $\beta$  erhaltene Gleichspannung  $E$  ist sogar bei Leerlauf nicht konstant, sondern gemäß Gleichung (3) der Netzspannung  $E_{1rs}$  proportional, die bekanntlich praktisch innerhalb eines beträchtlichen Bereiches schwanken kann.

2. Bekanntlich hat der Einankerumformer (Abb. 1) die unangenehme Eigenschaft, daß bei Belastungsstößen die Änderung des Wechselstromes im Läufer hinter der Änderung des Gleichstromes zurückbleibt, wodurch im Läufer eine Querdurchflutung entsteht, die mit dem in der Längsachse wirkenden Erregerfluß des Ständers ein Drehmoment hervorruft. Infolgedessen beginnt der Läufer zu pendeln, was den normalen Gleichgewichtszustand zwischen der im Läufer durch den Gleichstrom und der durch den Drehstrom erzeugten



Durchflutung stört. Dies hat zur Folge, daß periodisch die Richtung wechselnde Querdurchflutungen auftreten, die die »dynamische« Kommutation enorm erschweren. Da bei der Anordnung gemäß Abb. 2 ebenfalls ein Längsfluß  $\Phi'$  vorhanden ist, treten in ihr bei Belastungsänderungen ähnliche Erscheinungen auf.

Wenn man bedenkt, daß der Motorgenerator oft auf solchen Gebieten verwendet wird, wo häufig starke Belastungsänderungen vorkommen, die vom Generator gut vertragen werden, so wird klar, daß auch in dieser Beziehung Anordnungen, die prinzipiell Abb. 2 entsprechen, keinen erfolgreichen Wettbewerb mit ihm aufnehmen konnten.

3. In den letzten Jahrzehnten hat eine stürmische Entwicklung mit dem Ziel eingesetzt, den äußeren Kennlinien des Gleichstromgenerators selbsttätig eine besondere Gestalt zu verleihen. Dies erfolgt entweder durch Anordnung besonderer Wicklungen oder Stromkreise (z. B. die KRÄMERSche oder die ROSENBERGSche Maschine) oder indem der Generator als Verstärkermaschine ausgebildet ist (z. B. die Amplidyne). Es ist klar, daß die Anordnung gemäß Abb. 2 diese modernen Ansprüche nicht befriedigen konnte.

Würde es aber gelingen, den Einankerumformer nicht nur von den weiter oben angeführten Nachteilen zu befreien, sondern ihn auch als Regelmachine oder gar als Verstärkermaschine zu verwenden, hätte dies um so größere Bedeutung, als sich immer wieder zeigt, daß je mehr man die Maschinenleistungen vergrößert, desto mehr viele prinzipielle Nachteile des Motorgenerators in den Vordergrund treten:

Oft macht der Umstand Schwierigkeiten, daß die Regel- oder Verstärkermaschinen einen Antrieb brauchen oder auf der Welle der zu regelnden Maschine sitzen müssen, was eine Vergrößerung der Länge der Maschinengruppe bedeutet.

Bei Stoßbelastungen kann es vorkommen, daß der Asynchronmotor, der den Regelgenerator antreibt, die Geschwindigkeit stark vermindert oder sogar die Stabilität verliert. Außerdem ruft eine weitere Vergrößerung der Leistung bei vielen elektrischen Regel- und Verstärkermaschinen prinzipielle Schwierigkeiten hervor.

Ausgehend von der kritischen Analyse der bisher bekanntgewordenen Lösungsversuche hat sich der Autor die Aufgabe gestellt, sämtliche oben aufgezählten Nachteile und Mängel des Einankerumformers zu beseitigen. Im Prozeß der langjährigen Arbeit an diesem Problem, die der Autor auf Grund der Gastfreundschaft der Sowjetunion als Leiter verschiedener Kollektive wissenschaftlicher Arbeiter theoretisch und experimentell zu führen die Möglichkeit hatte, wurde eine prinzipiell neue elektrische Maschine geschaffen — die AUTODYNE —, die frei von den angeführten Fehlern des Einankerumformers ist, über alle Vorteile gegenüber dem Motorgenerator in bezug auf Raumbedarf, Gewicht, Wirkungsgrad und die Möglichkeit, voreilenden

Strom in das Netz abzugeben, verfügt. Außerdem hat sie folgende Eigenschaften :

1. Die Autodyne vereinigt in sich einen Energieumformer und eine auf einem neuen Prinzip beruhende selbsttätig wirkende elektrische Regelmachine.

2. Die Autodyne ermöglicht die selbsttätige Regelung einer beliebigen elektrischen Größe, auf die sie einwirkt, wobei diese Größe konstant sein oder sich nach gewissen Gesetzen ändern kann.

3. In den meisten Schaltungsschemas der Autodyne kann ihre Steuerung mit Hilfe von Leistungen ermöglicht werden, die bedeutend kleiner sind als die Erregerleistung gewöhnlicher Generatoren. Deshalb stellt die Autodyne auch eine neue Art von elektrischer Verstärkermachine dar.

Im folgenden soll eine kurze Darstellung einiger Fragen der Theorie der Autodyne gegeben werden.

## 2. Die Erzeugung des sich im Zustande indifferenten Gleichgewichtes befindenden Magnetsystems der Autodyne

Nehmen wir an, daß wir bei der Anordnung gemäß Abb. 2 die Statorwicklungen und die von ihnen hervorgerufenen Durchflutungen  $\Theta_e$  und  $\Theta'_e$  beseitigen.

In diesem Falle wird der resultierende Erregerfluß  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$  durch die Durchflutung des Magnetisierungsphasenstroms  $\bar{I}_{m\text{ res}}$  hervorgerufen, den der Anker aus dem Dreiphasennetz erhält, und die durch den Fluß  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$  induzierte Phasenspannung  $\bar{E}_{1\text{ res}}$  hält der Netzspannung  $\bar{U}_{1\text{ res}}$  das Gleichgewicht (Abb. 6).

Wir erhalten also im Einankerumformer dieselben Verhältnisse wie in der Maschine *EU* (Abb. 3), allein mit dem entscheidenden Unterschied, daß der Läufer keine Antriebsmaschine besitzt. Untersuchen wir die sich hierbei ergebenden Verhältnisse :

Nehmen wir an, daß sich der Fluß  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$  in bezug auf den Anker gegen den Uhrzeigersinn mit der synchronen Geschwindigkeit

$$n_s = \frac{60 \cdot f}{p} \quad (11)$$

dreht und daß sich der Anker selbst im Uhrzeigersinn dreht. Dann kann man in Abhängigkeit von der Größe der Ankerdrehgeschwindigkeit drei Fälle unterscheiden :

1. Wenn  $n < n_s$ , dreht sich der Fluß  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$  im Raum mit der Geschwindigkeit  $n_s - n$  gegen den Uhrzeigersinn (Abb. 6).

Da sich aber der Winkel  $\beta$  proportional zur Zeit ändert, ändert sich die Spannung  $E$  der Formel (3) gemäß nach dem Sinusgesetz. Deshalb entsteht



zwischen den Bürsten  $A$  und  $B$  die Wechselstromspannung  $U_{\sim}$ , die die Frequenz

$$\frac{p(n_s - n)}{60}$$

besitzt.

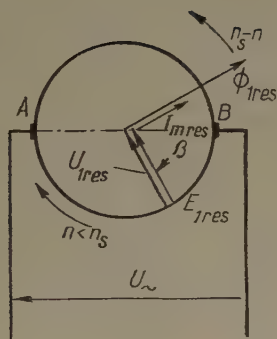


Abb. 6

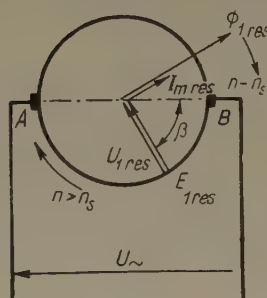


Abb. 7

2. Wenn  $n > n_s$ , dreht sich der Fluß  $\bar{\Phi}_{1res}$  im Raum mit der Geschwindigkeit  $n - n_s$  im Uhrzeigersinn (Abb. 7). Infolgedessen entsteht zwischen den Bürsten  $A$  und  $B$  wieder eine Wechselspannung  $U_{\sim}$  mit der Frequenz  $\frac{p(n - n_s)}{60}$ .

3. Wenn  $n = n_s$ , dreht sich der Fluß  $\bar{\Phi}_{1res}$  im Raume nicht und der Winkel  $\beta$  wird konstant sein; deshalb hat in diesem Falle die zwischen den Bürsten  $A$  und  $B$  (Abb. 8) entstehende Spannung die konstante Größe

$$U = U_{\max} \cdot \cos \beta = c_1 U_{1res} \cdot \cos \beta, \quad (12)$$

wobei  $U$  die maximale Größe  $U_{\max}$  dann hat, wenn  $\beta = 0$ .

Der zweite und dritte Fall erscheint auf den ersten Blick unreal, da beim Fehlen von Statorwicklungen kein Drehmoment entsteht, welches dem Reibungsmoment entgegengesetzt wäre. Infolgedessen kann sich der Anker offenbar nicht synchron drehen.

Indessen nehmen wir an, daß das Reibungsmoment  $M_R$  auf irgendeinem Wege beseitigt wurde und auch andere denkbare innere Drehmomente nicht auf den Anker wirken wie z. B. die Momente, die infolge der Hysterese und der in verschiedenen Richtungen verschieden großen magnetischen Leitfähigkeit entstehen.

In diesem Falle behält der Anker, nachdem er aus einem beliebigen Grunde auf die Geschwindigkeit  $n_s$  beschleunigt wurde, diese Drehzahl bei und deshalb werden die Größen  $\beta$  und  $U$  konstant bleiben. Dabei kann der





gesetzten Impulses  $+\Delta\theta'$ , welcher ein den Anker verlangsames Moment hervorruft, drehen sich offenbar die Vektoren  $\bar{U}_{1res}$ ,  $\bar{E}_{1res}$ ,  $\bar{\Phi}_{1res}$  und  $\bar{I}_{mres}$  gegen den Uhrzeigersinn aus der der Abb. 11 entsprechenden Lage in die der Abb. 12 gemäße Lage, wobei sich die Spannung  $U$  von  $+U$  bis  $+U_{max}$  ändert.

Auf diese Weise zeigt sich, daß sogar unbedeutende Größen der Stator-durchflutungen  $\pm\Delta\theta'$  mit Hilfe der durch sie hervorgerufenen Momente starke Veränderungen der Größe  $U$  verursachen können.

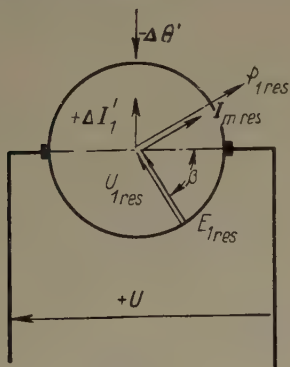


Abb. 9

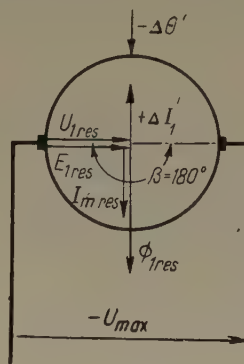


Abb. 10

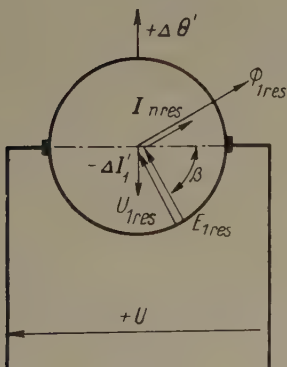


Abb. 11

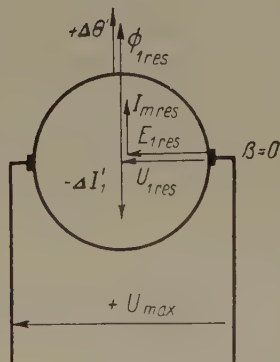


Abb. 12

Demnach stellt das System gemäß Abb. 9 und 11 das Grundschema einer neuen Verstärkermaschine dar, die von den Stator-durchflutungen  $\pm\Delta\theta'$  gesteuert wird. Wenn wir die Änderungen der zwischen den Bürsten abgenommenen Gleichspannung auf die erwähnten Steuer-durchflutungen negativ rückkoppeln, d. h. derart, daß die von letzteren hervorgerufenen Steuer-momente  $\mp\Delta M$  die erwähnten Spannungsänderungen zu beseitigen trachten, so ist es offenbar möglich, stabil arbeitende Maschinen zu erhalten, die nicht nur die Leistung des Dreiphasenstromes in Gleichstromleistung verwandeln (oder umgekehrt), sondern außerdem die eigenen Parameter oder die anderer

Maschinen je nach dem konkreten Schaltungsschema der Rückkoppelung selbsttätig stabilisieren oder gemäß einer anderen gewünschten Gesetzmäßigkeit regeln.

Bevor wir aber Beispiele der erwähnten Rückkoppelung und der durch sie erzielbaren Betriebseigenschaften der Autodyne zeigen, müssen wir noch einige wichtige Teilprobleme lösen. Sie beziehen sich auf die Frage der Kommutation sowie auf den Strom  $I_{m\text{res}}$ , von dem wir schon in einem anderen Zusammenhang aufgezeigt haben, daß er die Belastbarkeit des Läufers verringert und den Leistungsfaktor verschlechtert.

### 3. Die zweckmäßige Ausbildung der magnetischen Kreise der Autodyne

Im Abschnitt 2 wurde angenommen, daß der magnetische Widerstand, den der Erregerfluß zu überwinden hat, bei beliebiger Richtung des letzteren gleichbleibt. Dies würde z. B. dann zutreffen, wenn der Ständer ähnlich ausgeführt wäre, wie in einer Asynchronmaschine.

Eine derartige magnetische Konfiguration würde aber große Kommutationsschwierigkeiten hervorrufen, da der Querfluß  $\Phi_1$  durch die Kommutationszone hindurchgehen würde. Ein ähnliches Problem würde sich übrigens auch in bezug auf den Längsfluß  $\Phi'_1$  ergeben, da im nächsten Abschnitt auch von der Verwendung von Hilfsbürsten die Rede sein wird, die senkrecht zu den Arbeitsbürsten  $A$  und  $B$  angeordnet sind.

Aus den aufgezählten Gründen wählen wir eine magnetische Konfiguration, bei der die Maschine gespaltene, diagonal angeordnete Pole besitzt, was zur Folge hat, daß das Magnetsystem einer solchen 2poligen Autodyne wie ein Magnetsystem einer 4poligen Gleichstrommaschine aussieht (Abb. 13).

Da die Maschine nur vier Symmetrieebenen besitzt und daher die von uns bisher vorausgesetzte Gleichmäßigkeit der Leitfähigkeit in allen Richtungen im gegebenen Falle nicht besteht, könnte man im ersten Augenblick vermuten, daß in einer solchen Autodyne ein Reaktionsmoment entstehen muß.

Eine genaue Untersuchung dieser Frage zeigt aber, daß eine derartige Befürchtung unbegründet ist.

Zerlegen wir den Magnetisierungsstrom  $\bar{I}_{m\text{res}}$  (Abb. 14) in zwei Komponenten, von denen die eine  $\bar{I}'_m$  in der Richtung der Längsachse und die andere  $\bar{I}_m$  in der Richtung der Querachse der Maschine wirkt. Das Verhältnis des durch die Durchflutung des Stromes  $I'_m$  hervorgerufenen Flusses  $\Phi'$  (Abb. 13) zum Strom  $I'_m$  wird durch die Leitfähigkeit der Maschine in der Richtung der Längsachse bestimmt. Sie ist offenbar gleich der Leitfähigkeit längs der Querachse, die das Verhältnis des Flusses  $\Phi$  zu jenem Strom  $I_m$  bestimmt, durch dessen Durchflutung  $\Phi$  hervorgerufen wird. Daher ist



$$\frac{I_m}{\Phi} = \frac{I'_m}{\Phi'} = c_3. \quad (14)$$

Andererseits ist

$$\frac{\Phi}{\Phi_1} = \frac{\Phi'}{\Phi'_1} = c_4, \quad (15)$$

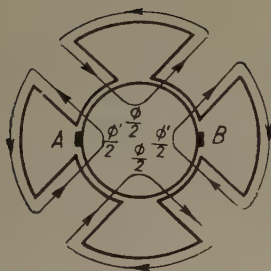


Abb. 13

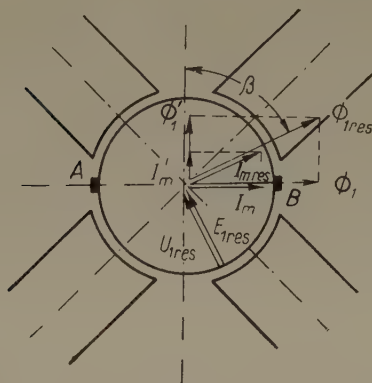


Abb. 14

wobei  $c_4$  konstant ist und  $c_3$  vorläufig als konstant angenommen wird.

Daher ist den Formeln (1), (2), (14) und (15) gemäß

$$\frac{I_m}{I'_m} = \frac{\Phi_1}{\Phi'_1} = \operatorname{tg} \beta. \quad (16)$$

Daraus folgt, wie Abb. 14 zeigt, daß der Vektor des Stromes  $\bar{I}_{mres}$  bei beliebigem Winkel  $\beta$  der Richtung nach mit dem Vektor  $\bar{\Phi}_{1res}$  zusammenfällt, d. h. senkrecht zum Vektor  $\bar{E}_{1res}$  liegt und daher keine Wirkkomponente enthält, ohne die kein Reaktionsmoment entstehen kann.

Trotzdem im gegebenen Fall die magnetische Konfiguration in verschiedenen Richtungen nicht gleich ist, zeigt sich, daß in der nach Abb. 13 ausgeführten Autodyne dieser Umstand keinen Einfluß auf die oben erhaltenen Resultate hat.

#### 4. Das Problem der schlüpfenden Stator durchflutungen

Das Magnetsystem gemäß Abb. 13 verbessert die Kommutation bedeutend, da die Kommutationszone nunmehr wie in der Gleichstrommaschine zwischen ausgeprägten Polen liegt. Aber noch immer kann die Querkompo-

nente des Magnetisierungsstromes  $\bar{I}_{m\ res}$  einen, wenn auch infolge der Pollücke bedeutend geschwächten, durch die Kommutationszone gehenden Querfluß hervorrufen. Wir wollen daher zur Untersuchung der Frage übergehen, ob wir nicht den Strom  $\bar{I}_{m\ res}$  überhaupt beseitigen könnten. Hierbei entsteht vor allem folgendes Problem:

Um das indifferente Gleichgewicht des Flusses  $\bar{\Phi}_{1\ res}$  zu gewährleisten, haben wir bisher auf die Verwendung der üblichen Statorerregewicklungen des Einankerumformers verzichtet, da sie bestimmte Drehmomente hervorrufen, die die freie Drehung des Flusses erschweren.

Um diese Momente zu beseitigen, wurde (Abb. 8 und 14) ein derartiges System der Rotorerregung verwirklicht, bei welchem die durch den Rotorstrom  $\bar{I}_{m\ res}$  erzeugte Durchflutung der Erregung beim Schlüpfen des Rotors und des Flusses  $\bar{\Phi}_{1\ res}$  zusammen mit  $\bar{\Phi}_{1\ res}$  schlüpft. Diese Art der Erregung, die man »schlüpfende Rotorerregung« nennen könnte, hat aber eben jenen Mangel zur Folge, den wir nunmehr beseitigen möchten, nämlich die Entstehung des Stromes  $I_{m\ res}$ . Deshalb entsteht die Frage, ob man nicht dasselbe Ziel — zu dessen Erreichung wir auf die Erregewicklung verzichtet haben — und zwar die Befreiung des Ankers von dem auf ihn wirkenden, durch diese Wicklung hervorgerufenen Drehmoment auf einem anderen Weg ohne Schaffung eines Rotorerregestromes erreichen kann.

Dieses Problem fand seine Lösung als »Wicklungssystem der schlüpfenden Statorerregung«, welches die bei der Änderung der Richtung des Flusses  $\bar{\Phi}_{1\ res}$  notwendige neue Verteilung der Statordurchflutung selbsttätig ohne Schaffung eines Drehmomentes gewährleistet.

Zur Entwicklung des erwähnten Systems von Statorwicklungen ist es zweckmäßig, von der oben beschriebenen Erscheinung der Kompensationsströme auszugehen, d. h. man muß zu der erwähnten Durchflutung der Erregung, welche durch den Rotorstrom  $\bar{I}_{m\ res}$  hervorgerufen wird, auf dem Stator eine Durchflutung hinzufügen, die bei einem beliebigen Winkel  $\beta$  im Rotor einen Kompensationsstrom hervorruft, der gleich und entgegengesetzt dem Strom  $\bar{I}_{m\ res}$  ist.

Untersuchen wir diese Frage für eine Autodyne, welche die in der Abb. 13 gezeigte Konfiguration besitzt. Hierbei gehen wir von den Formeln (1), (2), (6), (7), (14) und (15) aus, aus denen folgt, daß, wenn wir das konstante Verhältnis

$$\frac{E_{1\ res}}{\bar{\Phi}_{1\ res}} = c_5 \text{ nennen, folgende Beziehungen gelten:} \quad (17)$$

$$I_m = c_3 c_4 \bar{\Phi}_{1\ res} \sin \beta = \frac{c_3 c_4}{c_5} E_{1\ res} \sin \beta = \frac{c_3 c_4}{c_5} E'_1 \quad (18)$$

und



$$I'_m = c_3 c_4 \Phi_{1 \text{ res}} \cos \beta = \frac{c_3 c_4}{c_5} E_1. \quad (19)$$

Die gestellte Aufgabe wird gelöst sein, wenn wir der Längs- und Querachse entlang Statordurchflutungen  $\Theta'_e$  und  $\Theta_e$  von solcher Größe erzeugen, daß der von  $\Theta'_e$  hervorgerufene Kompensationsstrom gleich  $I'_m$  sei, während der von  $\Theta_e$  hervorgerufene Kompensationsstrom gleich  $I_m$  sei. Analog zur Formel (13) ist es zur Erreichung eines solchen Effektes nötig, daß die Größen dieser Durchflutungen gleich sein mögen

$$\Theta'_e = \frac{I'_m}{c_2} = \frac{c_3 c_4}{c_2 c_5} \cdot E_1 \quad (20)$$

und

$$\Theta_e = \frac{I_m}{c_2} = \frac{c_3 c_4}{c_2 c_5} \cdot E'_1. \quad (21)$$

Daraus folgt, daß die Aufgabe der Schaffung eines Systems von Wicklungen der schlüpfenden Statorerregung gelöst sein wird, wenn es uns gelingt, den Strom  $I'_e$  (Abb. 2a) proportional zu  $E_1$  und den Strom  $I_e$  proportional zu  $E'_1$  zu machen.

Wenn wir in Betracht ziehen, daß laut Formel (8)  $E_1 = \frac{E}{c_1}$ , so ergibt sich, daß zur Schaffung der notwendigen Durchflutung  $\Theta'_e$  genügt, den Strom  $I'_e$  mit Hilfe der zwischen den Bürsten *A* und *B* erhaltenen Spannung zu erzeugen.

In diesem Falle ist die Durchflutung  $\Theta'_e$  gleich

$$\Theta'_e = c_6 \cdot E = c_6 c_1 E_1, \quad (22)$$

wobei  $c_6$  eine Konstante ist.

Wenn man die Konstanten derart auswählt, daß

$$c_6 \cdot c_1 = \frac{c_3 c_4}{c_2 c_5} \quad (23)$$

sei, so gewährleistet die Durchflutung  $\Theta'_e$  das Verschwinden des Stromes  $I'_m$  [Formel (20)].

Die innere Spannung  $E'_1$  bleibt bei der von uns angenommenen Lage des Flusses  $\Phi_{1 \text{ res}}$  im Diagramm der zeitlichen Vektoren (Abb. 2b) um  $90^\circ$  hinter

$E_1$  zurück. Daraus folgt: Wenn der inneren Spannung  $E_1$ , die vom Fluß  $\Phi'_1$  in der Phasenwicklung induziert wird, auf der Gleichstromseite die innere Spannung  $E = c_1 E_1$  entspricht, welche längs der Achse der Bürsten  $A$  und  $B$  wirkt, so entspricht der inneren Spannung  $E'_1$  auf der Gleichstromseite die innere Spannung  $E' = c_1 E'_1$ , die längs der zur Achse der Bürsten  $A$  und  $B$  senkrechten Achse wirkt. Wenn wir auf diese Achse für einen kleinen Erregerstrom berechnete Hilfsbürsten  $C$  und  $D$  anordnen und von diesen Bürsten eine Wicklung speisen, welche vom Strom  $I_e$  durchflossen wird und denselben Querschnitt und dieselbe Windungszahl besitzt wie die Wicklung, welche vom Strom  $I'_e$  durchflossen wird, so wird die in ihr hervorgerufene Durchflutung gleich

$$\Theta_e = c_6 \cdot E' = c_6 \cdot c_1 E'_1 = \frac{c_3 c_4}{c_2 c_5} \cdot E'_1 \quad (24)$$

sein, d. h. sie wird eine Größe haben, die das Verschwinden des Stromes  $I_m$  gewährleistet [Formel (21)].

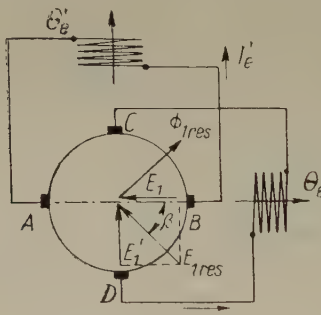


Abb. 15/a

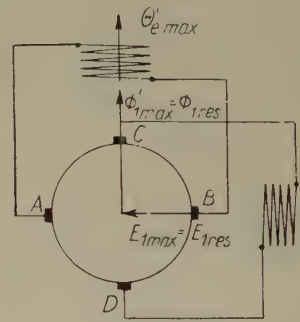
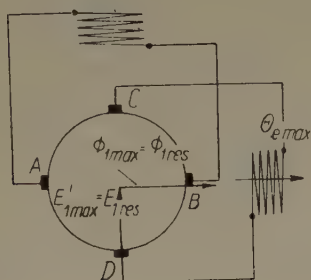


Abb. 15/b

Auf diese Weise erhalten wir (Abb. 15a) das gesuchte System der Statorwicklungen der schlüpfenden Erregung, welche bei beliebiger Lage des Flusses  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$  jene Durchflutung des Stators gewährleistet, die zur Erzeugung der Flüße  $\Phi'$  und  $\Phi$  notwendig ist. Abb. 15b zeigt dasselbe Schaltungsschema für den Fall, daß  $\beta = 0$  und  $E_1 = E_{1\text{ max}} = E_{1\text{ res}}$ . Hierbei hat die innere Spannung  $E$ , welche zwischen den Bürsten  $A$  und  $B$  wirkt, die Größe  $E_{\text{ max}}$  und ruft die Durchflutung  $\Theta'_{e\text{ max}}$  hervor. Andererseits ist  $E'_1 = 0$ ,  $E' = 0$  und deshalb die Durchflutung  $\Theta_e = 0$ . Auf diese Weise wirkt die Durchflutung nur der Längsachse entlang, was der Lage des Flusses  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$  entspricht. Hierbei entspricht die maximale Größe  $\Theta'_{e\text{ max}}$  dem Umstand, daß auch  $\Phi'_1$  die maximale Größe  $\Phi'_{1\text{ max}} = \Phi_{1\text{ res}}$  hat.

Abb. 15c zeigt die geänderte Verteilung der Statordurchflutung für den Fall, daß  $\beta = 90^\circ$ .

Die Hinzufügung des Systems von Statorwicklungen (Abb. 15a), welches den Rotor vollständig vom magnetisierenden Strom entlastet, ruft praktisch kein Drehmoment hervor, was man leicht auf Grund folgender Überlegungen beweisen kann.



*Abb. 15/c*

Der durch die Durchflutung  $\Theta'_e$  bewirkte Kompensationsstrom  $c_2\Theta'_e$  erzeugt die Generatorleistung  $3c_2 \cdot E_{1\text{res}} \cdot \Theta'_e \sin \beta$ , die, wenn wir die Formeln (20) und (6) in Betracht ziehen, gleich ist:

$$3 \frac{c_3 c_4}{2 c_5} \cdot E_{1res}^2 \cdot \sin 2\beta.$$

Der Kompensationsstrom  $c_2\theta_e$  ergibt laut Formeln (21) und (7) die Motorleistung

$$3 c_2 E_{1res} \Theta_e \cos \beta = 3 \frac{c_3 c_4}{2 c_5} E_{1res}^2 \cdot \sin 2 \beta.$$

Auf diese Weise ist die Gesamtleistung gleich 0, d. h. die Hinzufügung des in Abb. 15 dargestellten Wicklungssystems der schlüpfenden Statorerregung ruft kein Drehmoment hervor und stört nicht — im Gegensatz zur Erregerwicklung des Einankerumformers — den Zustand des indifferenten Gleichgewichts des Flusses  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$ .

Die weiteren Untersuchungen haben gezeigt, daß man denselben Effekt einfacher und wirtschaftlicher auf Grund des Schemas in Abb. 16 erhalten kann. In diesem Schema ist nur eine Hilfsbürste C vorgesehen. Die Pfeile im Anker zeigen die Richtung der Wirkung der induzierten Spannungen  $E$  und  $E'$ .



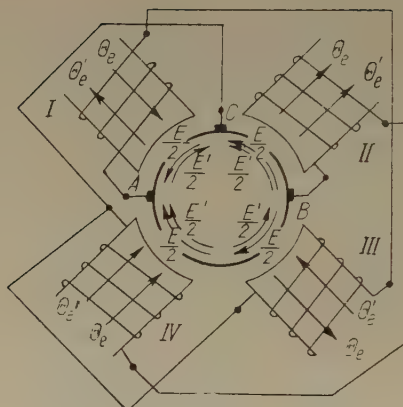


Abb. 16

Offenbar entsteht zwischen den Bürsten *A* und *C* die innere Spannung  $\frac{E-E'}{2}$  und zwischen den Bürsten *C* und *B* die Spannung  $\frac{E+E'}{2}$ . Die Spannung  $\frac{E-E'}{2}$  speist die sich auf den Halbpolen *I* und *III* befindenden Wicklungen, während die Spannung  $\frac{E+E'}{2}$  die auf den Halbpolen *II* und *IV* befindlichen Wicklungen speist.

Auf Grund der obigen Erläuterungen ist es ohne weiteres klar, daß auch das Wicklungssystem gemäß Abb. 16 bei beliebigem Winkel  $\beta$  keinerlei inneres Drehmoment erzeugt. Außerdem vermögen wir auch folgendes Problem zu lösen:

Bisher haben wir die Wirkung des Reibungsmomentes vernachlässigt, während es doch in Wirklichkeit besteht und den Rotor zu verzögern sucht. Wir können aber seine Wirkung folgendermaßen kompensieren:

Wir haben die Wirkung der schlüpfenden Statorerregung damit erklärt, daß wir dem Strom  $\bar{I}_{m\,res}$  im System gemäß Abb. 9 und 11 einen konstanten Kompensationsstrom superponieren, den wir mit Hilfe der Wicklungen der Abb. 15 oder 16 erzeugen und der gleich groß und ihm entgegengesetzt ist, also der Spannung  $\bar{U}_{1\,res}$  um  $90^\circ$  voreilt. Stellen wir uns nunmehr z. B. ein Wicklungssystem vor, welches an die Bürsten *A*, *B* und *C* genau so angeschlossen ist, wie es Abb. 16 zeigt, wobei aber jede Spule auf dem im Uhrzeigersinn folgenden Halbpol liegt (Abb. 17), so dreht sich offenbar demgemäß auch der

Vektor des konstanten Kompensationsstromes mit, d. h. er fällt mit  $\bar{U}_{1\text{res}}$  in bezug auf die Richtung zusammen. Mit anderen Worten: Es entsteht ein konstantes Motordrehmoment, das bei entsprechender Wahl der Wicklungen das Reibungsmoment bei jedem beliebigen Winkel  $\beta$  selbsttätig aufhebt.

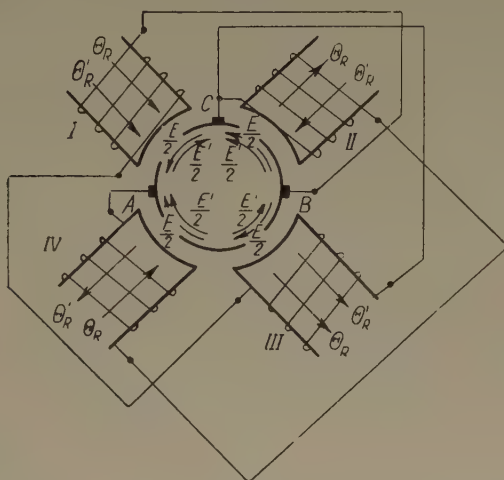


Abb. 17

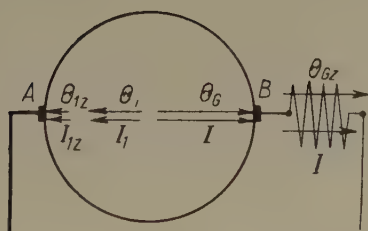


Abb. 18

Bei den sich auf die Abb. 15 und 16 beziehenden Beweisen gingen wir von der Annahme der Vernachlässigung der Sättigung aus. Es kann aber bewiesen werden, daß mit Hilfe der Wahl einer bestimmten Dicke des Statorjoches derselbe Effekt bei Sättigung erzielt werden kann. Der Beweis dieser Tatsache ginge aber über den Rahmen dieser Studie hinaus.

## 5. Die Gewährleistung guter stationärer und dynamischer Stromwendung

Sämtliche in den vorangehenden Punkten aufgezählten Maßnahmen gewährleisten eine gute Kommutation im stationären Betrieb, wie aus folgenden Erwägungen hervorgeht:

Da der Belastungswechselstrom  $I_1$  ein durch die Durchflutung  $\Theta_G$  des Belastungsgleichstromes  $I$  hervorgerufener Kompensationsstrom ist (Abb. 18), wird der Einfluß der resultierenden Durchflutung  $\Theta_G - \Theta_1$  dieser beiden Ströme sehr klein sein. Die durch den Strom  $I$  erzeugte Reaktanzspannung  $e_r$  wird teilweise durch die vom Strom  $I_1$  induzierte Reaktanzspannung

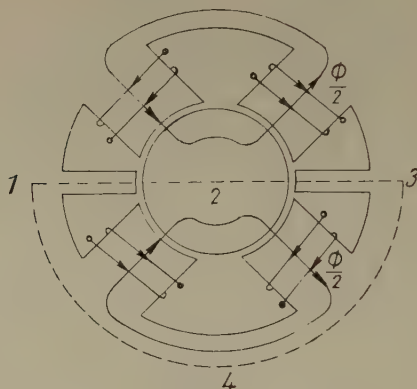


Abb. 19

kompensiert. Die resultierende Reaktanzspannung und den Einfluß des übrigbleibenden nicht kompensierten Teiles der Ankerdurchflutung auf die Stromwendezone kann man mit Hilfe einer vom Strom  $I$  durchflossenen Wendepolwicklung beseitigen, da  $I_1$  und  $I$  einander proportional sind.

Den Einfluß der Schwankungen der Durchflutung des Stromes  $I_1$  auf die Stromwendung, die ungefähr  $\pm 7\%$  betragen und eine Frequenz  $2mf$  besitzen (wobei  $m$  die Anzahl der Phasen ist), kann man mit Hilfe der Vergrößerung des Luftspaltes unter den Wendepolen leicht bis zu einem unschädlichen Wert verkleinern.

Untersuchen wir, welchen Einfluß der Querfluß  $\Phi$  auf die Stromwendung ausübt, wenn die Autodyne die Konfiguration der Abb. 13 gemäß besitzt.

Da die Erregerwicklungen die Wendezone nicht umfassen, sondern nur die bezüglichen Halbpole, so geht der Fluß  $\Phi$  in Form von zwei gleichen Zweigen (Abb. 19) an der Wendezone und den Wendepolen vorüber. Hierbei ist die Summe der durch das System der Statorerregerwicklung innerhalb der Kontur 1—2—3—4—1 hervorgerufenen Durchflutungen gleich Null. Andererseits liquidiert dieses System, wie wir bereits wissen, den Strom  $I_{m\text{ res}}$  im Anker. Infolgedessen geht nicht einmal ein Teil des Erregerflusses durch den unter den Wendepolen befindlichen Luftspalt hindurch.

Gehen wir jetzt zur Untersuchung der Frage über, wie die dynamische Stromwendung in der Autodyne verläuft. Um zu verstehen, warum in der Autodyne dieses Problem vollständig gelöst ist, während es im Einankerumfor-



mer große Schwierigkeiten hervorruft, wollen wir kurz untersuchen, worin das Problem besteht.

Wie bekannt, entstehen im Einankerumformer bei der Stoßbelastung Stromwendungsschwierigkeiten, da die Änderung des Stromes  $I_1$  und seiner Durchflutung  $\Theta_1$  hinter den Änderungen des Stromes  $I$  und seiner Durchflutung  $\Theta_G$  (Abb. 18) zurückbleibt. Zum Beispiel, wenn  $\Theta_G$  nach dem Gesetz  $\Theta_G = f(t)$  wächst, so ist  $\Theta_1 \approx \lambda' \cdot f(t)$ , wobei  $\lambda' < 1$ . Infolgedessen entstehen Restdurchflutungen von der Größe  $(1 - \lambda') \cdot f(t)$ , deren Fluß in den kurzgeschlossenen Windungen große Spannungen induziert und außerdem ein bedeutendes Drehmoment hervorruft, das Schwingungen des Ankers zur Folge hat.

Die Ursache für diese Erscheinung ist die von uns bisher vernachlässigte Tatsache, daß bei der Belastung eines Einankerumformers in ihm die Oberwellen des Flusses  $\Phi'$  sowie der vom Strome  $I$  im Rotor erzeugten Querdurchflutung ein inneres elektrodynamisches Bremsmoment erzeugen.

Es läßt sich beweisen, daß dieses Bremsmoment dem Produkt  $I \cdot E_{1\text{ res}} \cdot \cos \beta$  proportional ist. Dieser Beweis ginge aber über den Rahmen dieser Arbeit weit hinaus.

Bei plötzlichem Anwachsen des Belastungsstromes wird der Läufer durch das Anwachsen des erwähnten Momentes stark verzögert. Infolgedessen beginnt sich sowohl im Falle des gewöhnlichen Einankerumformers als auch bei der Anordnung gemäß Abb. 2 der Vektor  $\bar{U}_{1\text{ res}}$  zu drehen, während der Vektor  $\bar{E}_{1\text{ res}}$ , der senkrecht zu der Achse der Statorerregerdurchflutung ist, unbeweglich bleibt. Im Zusammenhang damit entstehen starke Ausgleichsströme, deren Querkomponente einen durch die Kommutationszone hindurchgehenden Fluß erzeugt. Außerdem beginnt der Läufer zu pendeln.

In der Autodyne haben wir prinzipiell ganz andere Verhältnisse, da im Falle einer Verzögerung des Läufers sich nicht nur der Vektor  $\bar{U}_{1\text{ res}}$ , sondern auch der Vektor  $\bar{E}_{1\text{ res}}$  gleichzeitig mit ihm dreht, da ja letzterer nicht mehr durch einen im Raum feststehenden, sondern durch einen sich selbsttätig mit dem Vektor  $\bar{U}_{1\text{ res}}$  mitdrehenden Erregerfluß  $\bar{\Phi}_{1\text{ res}}$  induziert wird. In der Autodyne können daher die oben erwähnten, die Stromwendung störenden Ausgleichsströme nicht auftreten. Außerdem besteht im Falle der Autodyne auch die prinzipielle Möglichkeit, die Wirkung des obenerwähnten, dem Produkt  $I \cdot E_{1\text{ res}} \cdot \cos \beta$  proportionalen Drehmomentes vollständig zu beseitigen. Dazu ist nur notwendig, in der Querachse des Stators einige vom Strom  $I$  durchflossene Windungen anzubringen, und zwar derart, daß die entstehende Durchflutung  $\Theta_{GZ}$  mit der Richtung von  $\Theta_G$  (Abb. 18) zusammenfallen möge.

Dann erzeugt offenbar diese Wicklung einen, dem Strom  $I$  proportionalen Kompensationsstrom, der mit dem Vektor  $\bar{E}_1$  in bezug auf Richtung zusammenfällt und daher eine Motorleistung erzeugt, die proportional dem Produkt  $I \cdot E_{1\text{ res}} \cdot \cos \beta$  und daher bei geeigneter Bemessung der erwähnten Wicklung

das oben erwähnte Bremsmoment vollständig aufzuheben instande ist. Damit fällt aber nicht nur dieses, das stationäre Gleichgewicht des Läufers störende Moment fort, sondern es wird auch die oben erwähnte Differenz der Durchflutungen  $\Theta_G$  und  $\Theta_1$  durch die vom erwähnten Kompensationsstrom erzeugte Durchflutung  $\Theta_{1Z}$  aufgehoben.

## 6. Die Autodyne als Stabilisator eines bestimmten Parameters

Nachdem wir nunmehr erzielt haben, daß sich der Magnetfluß  $\bar{\Phi}_{1res}$  in indifferentem Gleichgewicht befindet, wobei der Magnetisierungsstrom im Läufer beseitigt, das Reibungsmoment kompensiert und die stationäre und

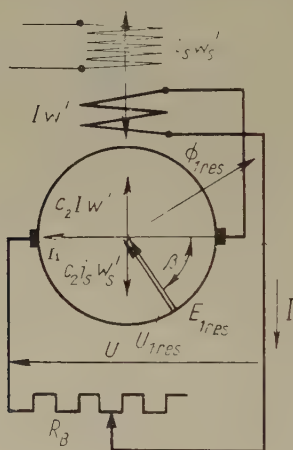


Abb. 20

dynamische Stromwendung vollkommen gesichert ist, gehen wir nunmehr dazu über, Autodynen herzustellen, indem wir, wie bereits erwähnt wurde, die Änderung der zwischen den Bürsten erhaltenen Gleichspannung auf die Steuerdurchflutung  $\pm \Delta \Theta'$  negativ rückkoppeln, wobei sich je nach der Art der Rückkoppelung die verschiedensten Betriebseigenschaften und Kennlinien ergeben.

In diesem Abschnitt wollen wir verschiedene solche Schaltungsschemas untersuchen, bei denen die Autodyne bestimmte Parameter  $\Pi_1$  — sei es eigene, sei es die anderer Maschinen — stabilisiert, indem sie sie mit einem als Sollwert dienenden anderen Parameter  $\Pi_2$  vergleicht.

Nehmen wir folgendes Beispiel: Wir wollen eine Autodyne verwirklichen (Abb. 20), in welcher der Laststrom  $I$  sich selbsttätig auf einen bestimm-

ten und dabei stufenlos regelbaren Sollwert stabilisiert, unabhängig von der Größe des äußeren Lastwiderstandes.

Zu diesem Zweck koppeln wir die Spannung  $U$  dadurch auf die Steuerdurchflutung  $\pm 4 \Theta'$  zurück, daß wir diese als Differenz zweier, auf dem Ständer hervorgerufenen, gleich großer und einander entgegengesetzter Durchflutungen erzeugen, von denen die eine durch den von der Spannung abhängigen Belastungsstrom und die andere durch einen konstanten, aber regelbaren Strom  $i_s$  gebildet ist. In diesem Falle ergibt sich, daß die Autodyne selbsttätig auf das Gesetz

$$I = i_s \cdot \frac{w'_s}{w'} \quad (25)$$

regelt, wobei  $w'_s$  die Windungszahl der von  $i_s$  und  $w'$  die Windungszahl der von  $I$  durchflossenen Wicklung ist.

Dies wird auf Grund folgender Überlegungen klar. Wenn nur die Durchflutung  $i_s w'_s$  existieren würde, so würde sie einen Kompensationsstrom  $c_2 i_s w'_s$  hervorrufen, welcher zusammen mit der Spannung  $E_{1\text{ res}}$  die Generatorleistung

$$3 E_{1\text{ res}} c_2 \cdot i_s w'_s \cdot \sin \beta$$

ergeben würde.

Analog würde die Durchflutung  $I \cdot w'$  eine Generatorleistung

$$3 E_{1\text{ res}} c_2 \cdot I w' \cdot \sin \beta$$

ergeben.

In stationärem Zustand, wenn  $n = n_s$ , muß die algebraische Summe aller Leistungen und der betreffenden Momente gleich Null sein, und die Leistung des Stromes  $c_2 i_s w'_s$  gleich der Leistung des Stromes  $c_2 I w'$ . Auf diese Weise erhalten wir die Gleichung

$$(i_s w'_s - I \cdot w') \cdot \sin \beta = 0. \quad (26)$$

Dabei nehmen wir an, daß auf den Anker keinerlei innere Momente wirken, d. h. die Generatorleistung des Stromes  $I$  und das durch ihn hervorgerufene Bremsmoment sind der Motorleistung und dem entsprechenden Beschleunigungsmoment genau gleich, die durch den Phasenstrom  $I_1$  verursacht sind. Letzterer kompensiert in der Ankerwicklung die magnetische Wirkung des Stromes  $I$ .

Wenn wir den Einzelfall ausschließen, bei dem  $\beta = 0$ , d. h. weder die Durchflutung  $i_s w'_s$  noch die Durchflutung  $I w'$  eine aktive Leistung oder das entsprechende Drehmoment hervorrufen, so hat die Gleichung (26) die in der Formel (25) dargestellte Lösung. In diesem Fall regelt die Autodyne in





man die erwähnten Geraden bis zu den Punkten 5, 7 verlängern usw. Wenn  $i_s = 0$ , verkleinert sich der Strom  $I$  sogar bei Kurzschluß bis Null (Punkt 0).

Wenn wir den Widerstand  $R_B$  durch eine Akkumulatorenbatterie laut Abb. 22 ersetzen, so garantiert die Autodyne die Konstanz des Ladestroms  $I$ , während sich die Spannung  $U$  selbsttätig im Prozeß der Ladung vergrößert. Bei Erreichung des Grenzwertes  $U = U_{\max}$  verkleinert sich der Strom der Batterie bis Null (die Gerade 2—3 in Abb. 21). Die Größe des Ladestroms hängt innerhalb der Grenzen  $0 < U < U_{\max}$  nicht von  $U$  ab, d. h. dieselbe Autodyne kann Batterien laden, die gänzlich verschiedene Spannungen besitzen. Den Ladestrom  $I$  kann man verkleinern, wenn man den Strom  $i_s$  bis Null verkleinert (z. B. die Kennlinien 4—5, 6—7 und 0—3). Bei Umschaltung der Richtung des Stromes  $i_s$  und Änderung der Richtung seiner Durchflutung  $i_s w'_s$  (der entsprechende Pfeil in Abb. 22 ist punktiert ausgeführt) ruft die im ersten Augenblick entstehende Durchflutung — ( $i_s w'_s + I w'$ ) ein beschleunigendes Drehmoment hervor, unter dessen Einfluß der Vektor  $\bar{E}_{1\text{ res}}$  sich weiter im Uhrzeigersinne dreht und durch eine solche Lage hindurchgeht, bei der die Spannung  $E$  der Autodyne gleich ist der Spannung der Akkumulatorenbatterie. Hierbei nimmt die Größe des Stromes  $I$  bis zum Wert 0 ab. Die im Stator wirkende Durchflutung hat noch die Größe  $i_s w'_s$  und ruft daher eine weitere Drehung des Vektors  $\bar{E}_{1\text{ res}}$  im Uhrzeigersinn hervor. Infolgedessen wird die Spannung  $E$  der Autodyne kleiner als die Spannung der Batterie. Dabei ändern der Strom  $I$  und die Durchflutung  $I w'$  ihre Richtung (punktierte Zeiger), und der Strom wächst bis zur Größe  $-i_s \frac{w'_s}{w'}$  (z. B. entsprechend der Geraden 8—9 in Abb. 21), bei der die Wirkung der Durchflutung des Stromes  $i_s$  mit Hilfe der abermals ihr entgegengesetzten Durchflutung des Stromes  $I$  vollkommen aufgehoben wird. Auf diese Weise gewährleistet die Autodyne jetzt die Entladung der Batterie bei konstanter Größe des Entladungsstromes. Die Maschine verwandelt sich aus einem den Wechselstrom in Gleichstrom umwandelnden Umformer in einen Gleichstrom in Wechselstrom umwandelnden Umformer, d. h. sie gibt die von der Batterie erhaltene elektrische Energie ins Netz zurück. Auf diesem Wege ist es möglich, die Formierung der Batterie ohne Rheostat durchzuführen.

Wenn man die Batterie durch einen Gleichstrommotor mit Fremderregung ersetzt, wird der letztere eine Exkavatorkennlinie haben (Abb. 23), da bei Strömen, die kleiner sind als  $i_s \frac{w'_s}{w'}$  die Autodyne wie ein gewöhnlicher Einankerumformer arbeitet, d. h. bei  $U \approx U_{\max}$ , was zur Folge hat, daß der Motor ungefähr mit  $n \approx \text{konstant}$  arbeiten wird. Bei Vergrößerung des Stromes  $I$  bis zur erwähnten Grenze verwandelt sich der Einankerumformer in eine Autodyne, die gemäß der Kennlinie  $I = \text{konstant}$ , d. h.  $M = \text{konstant}$  arbeitet. Der Sollwert der Stabilisierung der Drehzahl  $n$  kann durch den Erre-

gerstrom des Motors geregelt werden, der Sollwert der Stabilisierung des Drehmomentes  $M$  aber durch Änderung des Stromes  $i_s$  der Steuerwicklung der Autodyne.

Besonders effektiv kann die Schaltung verwendet werden, die Abb. 24 zeigt. In diesem Falle sind mehrere Gleichstrommotoren in Reihe geschaltet und erhalten von einer Autodyne ihren, auf einen beliebigen Sollwert einstell-

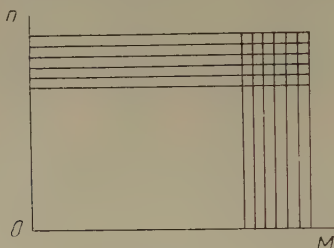


Abb. 23

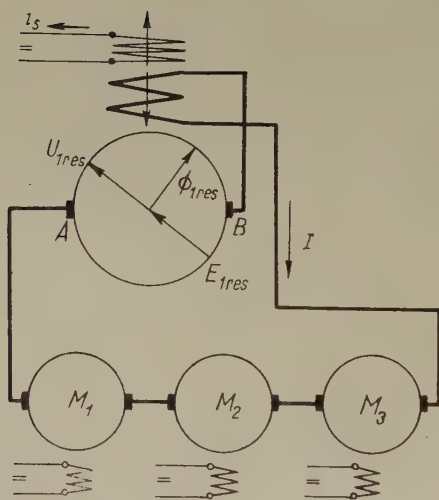


Abb. 24

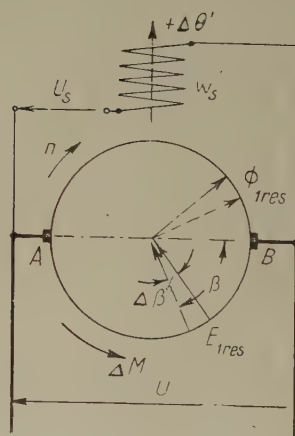


Abb. 25

baren Strom. Das Drehmoment der einzelnen Motoren kann mit Hilfe der einzelnen Erregerwicklungen eingestellt werden.

Bisher wurden Beispiele gezeigt, in denen eine Größe  $\Pi_1 = Iw'$  automatisch der Größe  $\Pi_2 = i_s w'_s$  gemäß geregelt wird. Dabei wurde der Vergleich dieser Werte untereinander mit Hilfe zweier Regelwicklungen durchgeführt. Aber der einfachste Fall der einachsigen Regelung der Autodyne ist die Ausnutzung einer einzigen Regel-(Steuer-)Wicklung  $w'_s$ .

Im Zusammenhang damit untersuchen wir mehrere Beispiele. Abb. 25 zeigt ein Beispiel der Verwirklichung des obengezeigten Prinzips, wo als



Größe  $\Pi_1$  die Spannung  $U$  der Autodyne dient und als Größe  $\Pi_2$  die Sollspannung  $U_s$ . Im gegebenen Falle ist die Wicklung  $w'_s$  unmittelbar an die Differenz dieser zwei Werte geschaltet. Nehmen wir an, daß die Vektoren  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  und  $\bar{E}_{1\text{res}}$  eine Lage einnehmen, bei welcher

$$U = U_s \quad (28)$$

ist, d. h.  $\Delta\theta' = 0$ . Dann dreht sich der Anker wegen des Fehlens eines Momentes  $\Delta M$  synchron und  $\Delta\beta = 0$ .

Man kann drei prinzipielle Fälle der Störung des stationären Betriebszustandes unterscheiden.

1. Der Anker ändert seine Geschwindigkeit, vergrößert sie z. B. um die Größe  $\Delta n$ . Dabei drehen sich die Vektoren  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  und  $\bar{E}_{1\text{res}}$  um den Winkel  $\Delta\beta$  im Uhrzeigersinn in die punktiert gezeigte Lage. Die Spannung  $U$  verkleinert sich um  $\Delta U$ , was zur Folge hat, daß in der Wicklung  $w'_s$  eine nach oben gerichtete Durchflutung erzeugt wird, welche das synchronisierende, den Anker verlangsamende Moment  $\Delta M$  hervorruft.

2. Die Größe  $U$  ändert ihren Wert z. B. deshalb, weil sich die Spannung  $U_{1\text{res}}$  der Wechselstromseite um die Größe  $\Delta U_{1\text{res}}$  und daher auch  $E_{1\text{res}}$  um die Größe  $\Delta E_{1\text{res}}$  verkleinert hat. Dann verringert sich  $U$  um die Größe  $\Delta U = c_1 \Delta E_{1\text{res}} \cdot \cos \beta$ . Da  $U_s$  einen unveränderlichen Wert hat, wird jetzt die Wicklung  $w'_s$  von der Spannung  $\Delta U$  gespeist werden. Wie im ersten Fall ruft die nach oben gerichtete Durchflutung  $\Delta\theta'$  ein Verzögerungsmoment  $\Delta M$  hervor. Infolgedessen dreht sich der Vektor  $\bar{E}_{1\text{res}}$  gegen den Uhrzeigersinn aus der punktiert gezeigten Lage in die mit Hilfe eines voll ausgeführten Pfeiles bezeichnete Lage, wobei er die neue stationäre Lage dort einnimmt, wo die Spannung  $U$  ihre frühere Größe erreicht.

Es ist klar, daß eine ähnliche Stabilisierung auch dann eintritt, wenn sich  $U$  aus einem beliebigen anderen Grund ändert (beispielsweise wegen des Spannungsabfalles im Anker bei Belastung).

3. Wenn wir die Größe der Sollspannung  $U_s$  ändern, z. B. sie um  $\Delta U_s$  erhöhen, so entsteht wieder ein nach oben gerichteter Impuls  $\Delta\theta'$  der Durchflutung. Analog zum zweiten Fall drehen sich die Vektoren  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  und  $\bar{E}_{1\text{res}}$  um den Winkel  $\Delta\beta$  gegen den Uhrzeigersinn, wobei sich die Spannung  $U$  solange vergrößern wird, bis sie den neuen Wert  $U + \Delta U = U_s + \Delta U_s$  erreicht.

Auf diese Weise ist die Autodyne die Quelle einer stabilisierten Spannung, unabhängig von beliebigen Faktoren, wie beispielsweise der Änderung der Belastung, der Spannung oder der Frequenz des Wechselstroms, wobei man die Größe der zu stabilisierenden Spannung stufenlos ändern kann.

In Abb. 26 sind die prinzipiellen Kennlinien  $U = f(I)$  dieser Maschine in Form von zur Abszissenachse parallelen Geraden gezeigt.

Die Autodyne mit einer solchen Kennlinie kann mit Erfolg überall dort angewandt werden, wo die selbsttätige Stabilisierung der Spannung  $U$  auf einen gegebenen, stufenlos regelbaren Sollwert erwünscht ist.

Wenn man mit der oben erwähnten Autodyne einen Gleichstrommotor speist, so kann der verlustlose Anlauf des Motors mit Hilfe der Vergrößerung der Steuerspannung  $U_s$  von 0 bis  $U_{s\max}$  leicht verwirklicht werden. Wenn man die Größe  $U_s$  ändert, so kann man stufenlos die Drehzahl des Motors regeln. Bei genügend schneller Verkleinerung der Größe  $U_s$  ändert sich die Richtung des Motorstroms und die Maschine ergibt Nutzbremung, wobei die Autodyne den Gleichstrom in Wechselstrom umformt. Infolgedessen kann man die Auto-

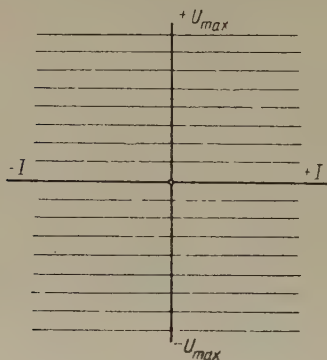


Abb. 26

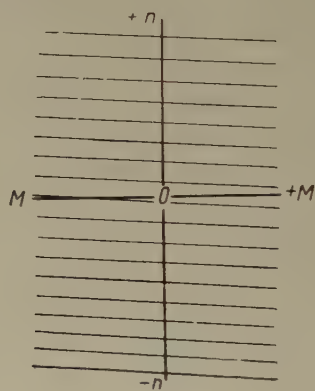


Abb. 27

dyne mit Erfolg auf jenen Gebieten des elektrischen Antriebes anwenden, in denen bisher zur Speisung von Gleichstrommotoren Motorgeneratoren verwendet wurden.

Als mechanische Kennlinien  $n = f(M)$  des von der Autodyne gespeisten Motors erhalten wir Gerade (Abb. 27), welche wegen des Spannungsabfalles im Motor eine kleine Neigung haben.

Die Größe  $\Pi_1$ , die mit der Größe  $\Pi_2$  verglichen wird, kann auch die algebraische Summe einiger Größen  $\Pi'_1, \Pi'_1$  usw. darstellen. Zum Beispiel ist es möglich, bei der Speisung des Motors von der Autodyne nicht die Spannung der Autodyne  $U$  auf Konstanz zu regeln, sondern die Größe  $U - KI$ , wobei  $K$  konstant ist. Infolgedessen verkleinert sich die Neigung der Geraden (Abb. 27).

Zu diesem Zweck muß man die Wicklung  $w'_s$  mit den Punkten  $a$  und  $c$  vereinigen (Abb. 28). Wenn das Verhältnis der Spannung, die zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  wirkt, zur Spannung  $U$  gleich  $\lambda$  ist, der Widerstand aber, welcher zwischen den Punkten  $b$  und  $c$  eingeschaltet ist, gleich  $r_1$ , so bekommen wir das Regelgesetz

$$\lambda U - Ir_1 = U_s, \quad (29)$$

d. h. die Spannung  $U_a$  der Autodyne ist gleich

$$U_a = U - Ir_1 = \frac{U_s}{\lambda} + Ir_1 \frac{1 - \lambda}{\lambda}. \quad (30)$$

Auf diese Weise gewinnen wir die Möglichkeit, ein Gesetz zu verwirklichen, wonach  $U_a - KI$  konstant ist, wobei

$$K = \frac{r_1}{\lambda} (1 - \lambda). \quad (31)$$

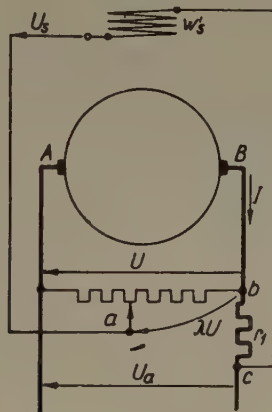


Abb. 28

Die Konstante  $K$  kann man leicht durch die entsprechende Wahl des Verhältnisses  $\lambda$  regeln, was zur Folge hat, daß man die Abweichung der Drehzahl des Motors von der konstanten entsprechend verringern kann.

Es ist klar, daß man das Gesetz  $\Pi_1 = \Pi_2$  auch in bezug auf jede beliebige andere elektrisch ausdrückbare Größe anwenden kann, obwohl sie keine direkte Beziehung zu der Autodyne hat.

Wenn beispielsweise die Wicklung  $w'_s$  (Abb. 25) nicht durch die Differenz  $U_s - U$ , sondern durch eine Spannung gespeist wird, die der Abweichung der Drehzahl des Motors von der konstanten Größe proportional ist, so wird die Autodyne den Motor derart regeln, daß die Drehzahl konstant bleibt. Wenn die Spannung, welche die Wicklung  $w'_s$  speist, der Differenz zwischen der Spannung  $U_s$  und der Spannung  $U_{Gen}$  des Gleichstromgenerators  $G$  (Abb. 29) proportional ist, so wird die als Erregermaschine arbeitende Autodyne  $A$  den Erregerstrom des Generators unabhängig von der Belastung oder von der Drehgeschwindigkeit des Generators so regeln, daß  $U_{Gen} = U_s$  ist. Nach demselben Prinzip kann die Autodyne als Erregermaschine den Generatorstrom regeln oder die Drehzahl, die Leistung oder den Leistungsfaktor von Motoren usw.



Solcherart kann die Autodyne nicht nur als ein solcher Leistungsumformer arbeiten, der auf seine eigenen Werte und Betriebseigenschaften einwirkt, sondern als selbsttätiger Regler anderer Maschinen oder Maschinengruppen, wobei ein besonderer Vorteil der Autodyne gegenüber andern selbsttätig gesteuerten Erregermaschinen darin besteht, daß sie weder einen speziellen Antriebsmotor verlangt noch auf die Welle der durch sie geregelten Maschine gesetzt werden muß. Außerdem muß folgender wichtiger Umstand besonders unterstrichen werden.

Wie schon erwähnt wurde, haben die Impulse  $\pm \Delta \theta'$  eine geringe Größe. Die zu ihrer Entstehung notwendige Leistung ist unvergleichlich klei-

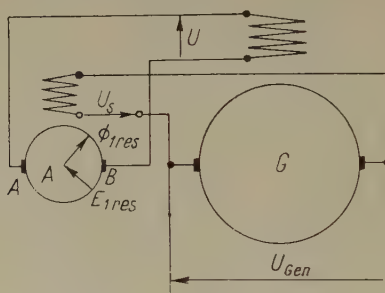


Abb. 29

ner als die zur Erregung der Generatoren angewandte und sehr unbedeutend im Vergleich zur Leistung der Autodyne.

Auf diese Weise stellt die Autodyne eine neue Art einer elektrischen Verstärkermaschine dar, die zu ihrer Drehung keinen Antriebsmotor erfordert.

Es gibt auch derartige Schaltungen, bei denen dieselbe Autodyne auf Wunsch entweder den Strom  $I$  oder die Spannung  $U$  stabilisiert.

Sie kann hierbei außerdem auf Wunsch einen Pufferbetrieb gewährleisten, bei dem eine Akkumulatorenbatterie einer andern Belastung parallelgeschaltet wird, wobei die Autodyne z. B. die Summe der beiden entstehenden Belastungsströme stabilisiert, so daß die Batterie entweder zusätzliche Leistung abgibt oder überflüssige aufnimmt.

Oben wurden Beispiele für die Verwendung der Autodyne als Regler gewisser Größen in solchen Schaltungsschemas aufgezählt, in denen die Autodyne selbst nur eine kleine Erregerleistung für andere Maschinen erzeugt (z. B. das Schema gemäß Abb. 29) oder selbsttätig arbeitet und die eigenen Parameter regelt. Aber man kann die Autodyne auch als eine solche Maschine verwenden, die mit anderen Maschinen zusammenarbeitet und gewisse Größen regelt, wobei sie gleichzeitig an der Leistungsabgabe der ganzen Maschinengruppe teilnimmt.

Abb. 30 und 31 zeigen als Beispiel die Schemas einer Autodyne, welche in Zu- und Gegenschaltung zur Spannung  $U_G$  einer andern, in Form eines Rechteckes gezeigten Gleichstromquelle geschaltet ist.

Nehmen wir beispielsweise an, daß sich die Spannung  $U_G$  in den Grenzen von  $+U_{\max}$  bis  $+U_{\min}$  ändert, während die Stabilisierung der Gesamtspannung  $U_a + U_G$  auf den Sollwert

$$U_s = \frac{+U_{\max} + U_{\min}}{2} \quad (32)$$

verlangt wird.

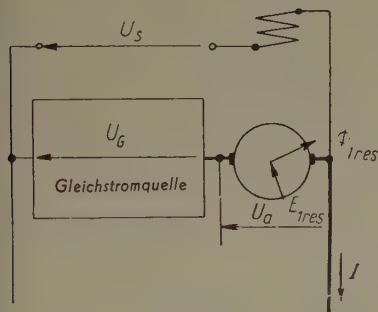


Abb. 30

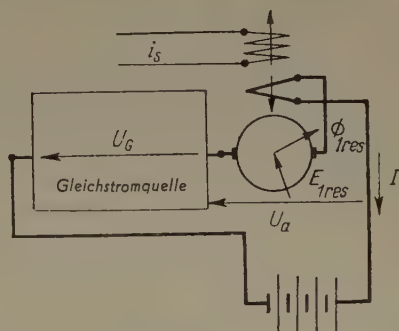


Abb. 31

In diesem Falle kann die Autodyne für die Spannung

$$U_a = \pm \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2} \quad (33)$$

ausgeführt werden, wobei sie nach dem Gesetz

$$U_a + U_G = U_s \quad (34)$$

regelt.

Bei der Verkleinerung der Spannung  $U_G$  z. B. bis  $U_{\min}$  fügt die Autodyne die Spannung  $\frac{U_{\max} - U_{\min}}{2}$  hinzu (Abb. 30), während sie bei der Vergrößerung der Spannung  $U_G$  bis  $U_{\max}$  umgekehrt die entgegengesetzt gerichtete Spannung  $-\frac{U_{\max} - U_{\min}}{2}$  hinzufügt. Auf diese Weise kann man die Autodyne für eine Leistung bauen, die kleiner ist als die gesamte Leistung der Maschinengruppe, und zwar im Verhältnis  $(U_{\max} - U_{\min}) : (U_{\max} + U_{\min})$ .

Wenn umgekehrt eine Spannung verlangt wird, welche ihre Größe in breiten Grenzen ändert, während  $U_G$  einer derartigen Regelung nicht unter-

worfen werden kann, erzeugt die Autodyne eine Spannung von derselben Richtung, wie  $U_G$  oder der ihr entgegengesetzten, wobei sie eine solche Größe hat, bei der sich die Gesamtspannung der Formel (34) gemäß entsprechend der Änderung der Steuerspannung  $U_s$  ändert.

Im Schema der Abb. 31 regelt die Autodyne den Strom (beispielsweise einer Akkumulatorbatterie) auf Konstanz mit Hilfe der entsprechenden selbsttätigen Änderung der Spannung  $U_a$ , welche in bezug auf Richtung mit der gegebenen Spannung  $U_G$  zusammenfällt oder ihr entgegengesetzt ist.

## 7. Autodynen mit speziellen äußeren Kennlinien

Während die im Abschnitt 6 beschriebenen Autodynen irgendwelche Parameter  $\Pi_1$  laut einem anderen gegebenen Parameter  $\Pi_2$  stabilisieren, mögen im folgenden Beispiele solche Autodynen gezeigt werden, bei denen das Schema der Rückkoppelung derart gewählt ist, daß sich das Verhältnis von  $U$  und  $I$  nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten selbsttätig ändert.

1. Man kann im Schema gemäß Abb. 20, 22 oder 24 den Strom  $i_s$  mit Hilfe einer Spannung erzeugen, welche die Differenz zwischen der gegebenen regelbaren Sollspannung  $U_s$  und der Istspannung  $\lambda U$  darstellt, die zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  des Potentiometerwiderstandes (Abb. 32a) wirkt. Auf diese Weise erhalten wir

$$i_s = \frac{U_s - \lambda \cdot U}{r'_s}, \quad (35)$$

wo  $r'_s$  der Widerstand der Wicklung  $w'_s$  ist. Dabei entspricht die Kennlinie der Autodyne der Gleichung

$$I = \frac{U_s - \lambda \cdot U}{r'_s \cdot w'} \cdot w'_s. \quad (36)$$

Abb. 32b zeigt die Kennlinien 1, 2, 3, 4, 5, welche sich voneinander durch die Größe  $\lambda$  unterscheiden und die Kennlinien 1', 2', 3', 4', 5', welche sich von den Kennlinien 1, 2, 3, 4, 5 durch die Größe  $U_s$  unterscheiden,

2. Es kann im Schema gemäß Abb. 20, 22 oder 24 als Sollwert die der induzierten Spannung  $E'$  proportionale Durchflutung der Wicklung fungieren, die zwischen die Zusatzbürsten  $C$  und  $D$  (Abb. 33) geschaltet ist und in der Richtung der Längsachse liegt.

Laut den Formeln (4), (5), (24) und (7) erhalten wir das Resultat

$$E' = \sqrt{E_{\max}^2 - E^2} \approx U' \approx \sqrt{U_{\max}^2 - U^2}, \quad (37)$$



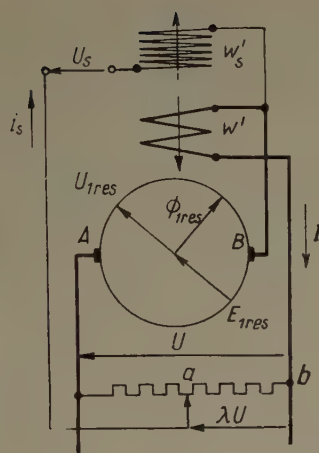


Abb. 32a

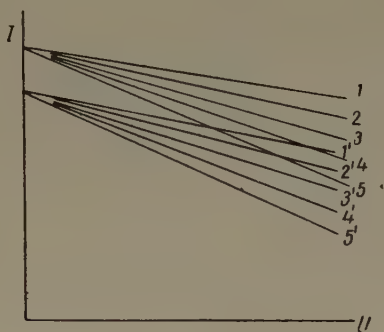


Abb. 32b

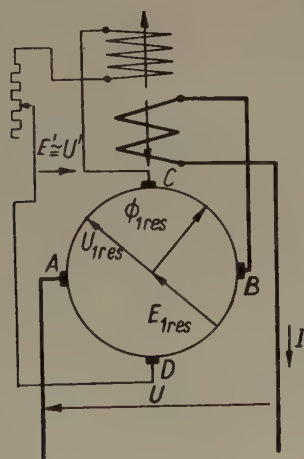


Abb. 33

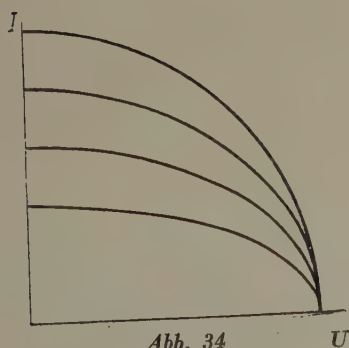


Abb. 34

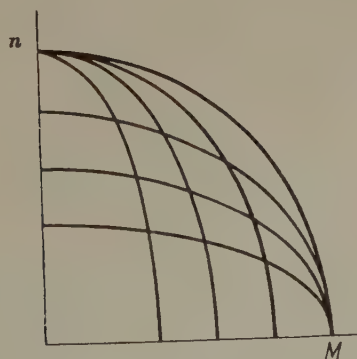


Abb. 35

d. h. die Kennlinie  $U' = f(U)$  der eben beschriebenen Autodyne ist kreisförmig.

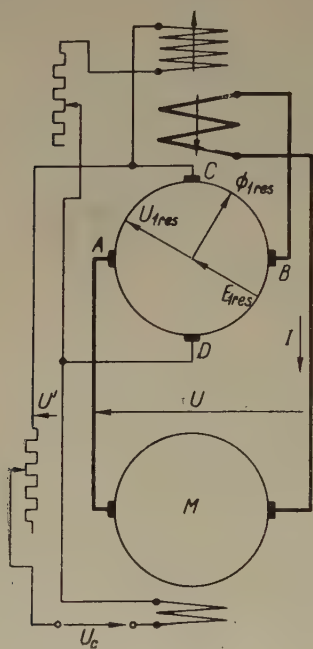


Abb. 36

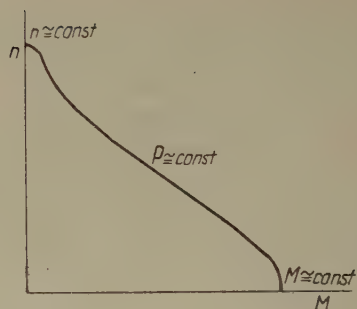


Abb. 37

Da die Durchflutung der im Schema (Abb. 33) von den Bürsten C und D gespeisten Wicklung proportional  $E'$  ist, aber die Durchflutung der Reihewicklung ihr gleich sein muß, wird die äußere Kennlinie für den Fall des Schemas gemäß Abb. 33 durch die Gleichung

$$I \sim \sqrt{U_{\max}^2 - U^2}, \quad (38)$$

beschrieben, d. h. durch die Gleichung einer Ellipse, in der die Größe des Maßstabes der Ordinatenachse von der Größe der Proportionalitätskonstanten abhängt (Abb. 34).

Wenn die erwähnte Autodyne einen Gleichstrommotor mit Fremderregung speist, bekommen wir eine Exkavator Kennlinie, wobei die Größe des Momentes (Abb. 35) durch Regelung des Stromes laut Abb. 34 regelbar ist. Die Drehzahl  $n$  des Motors wird durch die Änderung seines Erregerstroms geregelt.

Im gegebenen Fall speist die induzierte Spannung  $E'$  eine der Regelwicklungen. Indessen kann man  $E'$  auch zur Einwirkung auf eine andere mit der Autodyne verbundene Einrichtung verwenden, was weiter die Möglichkeiten der Formänderung der zu erhaltenden Kennlinien vergrößert.

Als Beispiel weisen wir auf die Abb. 36 hin, in welcher die Erregerwicklung des Motors  $M$  von der Spannung  $U' + U_c$  gespeist wird, wobei  $U_c$  eine gegebene Spannung und  $U'$  die von den Bürsten  $C$  und  $D$  der Autodyne erhaltene Spannung ist.

In diesem Falle erhalten wir das Resultat, daß bei kleinen Größen  $n$ , d. h. auch bei kleinen Größen  $U$ , bei denen  $\cos \beta \approx 1$  und daher  $U' \approx U'_{\max} = U_{\max} = \text{konstant}$  ist, der Anfangsteil der mechanischen Kennlinie der Ordinatenachse fast parallel bleibt; infolgedessen wird so wie in Abb. 35 bei kleinem  $n$  auf  $M \approx \text{konstant}$  geregelt (Abb. 37).

Wenn sich die Spannung  $U$  vergrößert und  $U'$  verkleinert, verringert sich auch der Erregerstrom des Motors, d. h. das Verhältnis des Drehmomentes  $M$  zum Strom  $I$  verkleinert sich und das Verhältnis der Geschwindigkeit zur Spannung  $U$  vergrößert sich. Dabei geht die mechanische Charakteristik allmählich in eine Kurve über, die beiläufig dem Gesetz

$$M \sim \frac{1}{n}, \quad \text{d. h.} \quad P = \text{konstant}$$

folgt (Abb. 37).

Wenn sich die Spannung  $U$  der Größe  $U_{\max}$  nähert, wird sie praktisch konstant, während sich die Spannung  $U'$  bis 0 verkleinert und der Erregerfluß nur durch die Spannung  $U_c$  erzeugt wird. Auf diese Weise erhält die Charakteristik die Form entsprechend der Gleichung  $n \approx \text{konstant}$  (Abb. 37).

Es gibt viele Beispiele dafür, wie man manchmal mit Hilfe kleiner Veränderungen des Schaltungsschemas verschiedene wesentliche Änderungen der Gestalt der Kennlinien und der Eigenschaften der Autodyne erhalten kann.

Die bisher aufgezählten Schaltungsschemas der Autodyne sind dadurch gekennzeichnet, daß alle Steuer- und Regelwicklungen in einer Achse angeordnet sind. Noch weitere Varianten von Kennlinien können wir erhalten, wenn wir in den Wicklungssystemen gemäß Abb. 16 oder 17 die Durchflutungen in einer Diagonalrichtung vergrößern und in der andern verkleinern. Weitere mögliche Varianten erhalten wir, wenn wir noch zusätzliche Querwicklungen anordnen. Die Behandlung dieser Fragen ginge aber über den Rahmen dieser Studie weit hinaus.

### 8. Die Ersparnisse an Elektroenergie in der Autodyne

Da die Autodyne nicht nur eine neuartige Verstärkermaschine ist, sondern vor allem auch ein Leistungsumformer, der offenbar bis zur selben Größenordnung der Leistung beansprucht werden kann wie der Einankerumformer, ist beim Vergleich mit andern möglichen Lösungen die Tatsache oft



ausschlaggebend, daß die Autodyne große Ersparnisse an Elektroenergie erzielen läßt.

Es ist selbstverständlich, daß der Wirkungsgrad der Autodyne bedeutend höher ist als der des Motorgenerators, worauf aber im folgenden hingewiesen werden muß, ist die interessante Tatsache, daß die Autodyne imstande ist, gleichzeitig mit der Abgabe der Wattleistung auch große Mengen von Blindleistung in das Netz abzugeben, und zwar in weit größeren Mengen, als dies bei Verwendung eines Einankerumformers oder eines von einem Synchronmotor angetriebenen Generators der Fall wäre. Diese Tatsache wird auf Grund folgender Überlegungen klar:

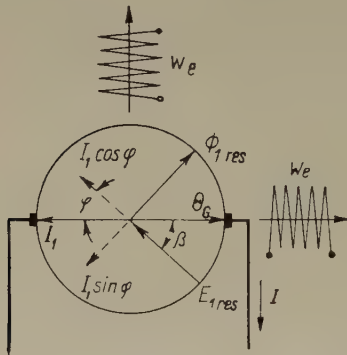


Abb. 38

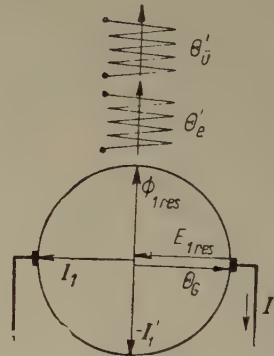


Abb. 39

Im Anker der Autodyne mit schlüpfender Statorerregung fließt beim Leerlauf praktisch kein Wechselstrom. Bei Belastung erzeugt der Gleichstrom im Rotor die Durchflutung  $\theta_G$  (Abb. 38), die einen Kompensations-Wechselstrom  $\bar{I}_1$  hervorruft. Die Komponente  $\bar{I}_1 \cos \varphi$  stellt den Wirkstrom dar, während die Komponente  $\bar{I}_1 \sin \varphi$  einen voreilenden Blindstrom darstellt. Auf diese Weise geht die Maschine, wenn sich die Wattbelastung wegen der Verkleinerung von  $U$  bei Konstanz des Stromes  $I$  verkleinert, selbsttätig in den Betriebszustand des Phasenkompensators über und verbessert den  $\cos \varphi$  des Netzes.

Hierbei muß man unterstreichen, daß diese Tatsache nichts Gemeinsames mit der aus der Theorie des gewöhnlichen Einankerumformers bekannten Erscheinung hat, die darin besteht, daß man voreilenden Strom mit Hilfe der Vergrößerung der Durchflutung der Statorerregung erhalten kann (Abb. 39). In dieser Maschine ist der Strom  $I_1$ , der die Durchflutung  $\theta_G$  des Stromes  $I$  kompensiert, ein Wattstrom, da  $\beta \approx 0$  ist. Daraus folgt, daß wenn die Durchflutung  $\theta'_e$  genügend groß zur Bildung eines Flusses ist, der die Spannung  $E_{1\text{res}}$  induziert, der Blindstrom gleich 0 ist. Man kann ihn aber als Strom  $-I'_1$  erhalten, wenn man zu  $\theta'_e$  die Durchflutung der »Übererregung«  $\theta'_u$  hinzufügt, welche durch den Strom  $-I'_1$  kompensiert wird.

Die Erzeugung der Durchflutung  $\Theta'_u$  ist mit zusätzlichen Verlusten im Stator und mit einer entsprechenden Vergrößerung seiner Dimensionen verbunden. Gleichzeitig ruft der voreilende Strom  $I'_1$  zusätzliche Verluste im Anker hervor, was auch eine Vergrößerung seiner Dimensionen verlangt.

Die Bedingungen der Entstehung eines voreilenden Stromes in der Autodyne sind prinzipiell ganz andere. Hier tritt, im Gegensatz zur »Statorübererregung«, eine Erscheinung auf, welche man »Rotorübererregung« nennen könnte. Wie aus Abb. 38 ersichtlich ist, besitzt die Grundwelle der Rotordurchflutung des Gleichstroms  $\Theta_G$  eine Komponente, die mit dem Fluß  $\bar{\Phi}_{1\text{res}}$  zusammenfällt. Da der Fluß bereits durch die Durchflutungen der Wicklungen  $w'_e$  und  $w_e$  gewährleistet ist, ruft die erwähnte Komponente einen Kompensationsstrom in Form einer voreilenden Komponente  $I_1 \sin \varphi$  des Wechselstroms hervor. Diese Komponente ruft also in der Autodyne keine entsprechenden Verluste und keine Vergrößerung der Dimensionen des Stators hervor, da diese bereits durch die Größen  $I_1$  und  $I$  bestimmt sind. Da im Anker der Autodyne im allgemeinen ein großer Teil der Wicklung vom Gleichstrom und vom entgegengesetzt gerichteten Wechselstrom durchflossen wird, die zusammen einen resultierenden Strom von kleinerer Größe bilden, so zeigt sich, daß in der Autodyne bei  $U = 0$  und bei Abgabe des maximalen voreilenden Stromes die Verluste bedeutend kleiner sein werden als im Einankerumformer der Abb. 39, sogar wenn er beim Leerlauf nur einen voreilenden Strom  $I'_1$  derselben Größe abgeben würde.

Die erwähnte Erscheinung der Rotorübererregung kann zur äußerst effektiven Erzeugung eines voreilenden Stromes in allen jenen Schemas der Autodyne ausgenutzt werden, in denen das Regeln in den Grenzen  $U_{\text{max}} > U > 0$  vor sich geht. Die Verringerung der Verluste im Umformer und auch die Abgabe voreilenden Stromes durch die Autodyne bringt große Ersparnisse an elektrischer Energie mit sich.

Ersetzen wir z. B. einen Motorgenerator von der Leistung 10 kW, dessen Motor 8 BkVA Blindleistung aufnimmt, durch eine Autodyne derselben Leistung, die 7 BkVA Blindleistung in das Netz abgibt, so bedeutet das, daß die letztere im Vergleich zum ersten 15 BkVA Blindleistung abgibt.

Um im Falle der Anwendung eines durch einen Asynchronmotor angetriebenen Generators eine zusätzliche Leistung von 15 kVA bei voreilem Strom zu erhalten, müßte man außer einem Generator für 10 kW und einem Motor für etwa 13 kW noch einen speziellen Kompensator für 15 kVA haben. Dabei würde aber ein Teil des mit Hilfe des letzteren erhaltenen Gewinnes an Wirkleistung, infolge der in ihm auftretenden inneren Verluste, verloren gehen, während die Abgabe eines voreilenden Stromes in der Autodyne, wie oben erläutert wurde, nicht mit einer Erhöhung von Verlusten verbunden ist.

Diese Eigenschaft der Autodyne stellt einen ihrer Hauptvorteile im Vergleich zu jenen Anordnungen dar, in denen Gleichrichter zur Erzeugung einer stufenlos regelbaren Gleichspannung verwendet werden (z. B. mit Hilfe von Drosselspulen geregelte Trockengleichrichter oder Quecksilbergleichrichter mit Gittersteuerung) und die, wie bekannt, im Mittlern einen ziemlich niedrigen Leistungsfaktor aufweisen.

### Zusammenfassung

Einleitend analysiert der Verfasser kritisch die bisher bekannt gewordenen Versuche, die Gleichspannung des Einankerumformers stufenlos zu regeln, sowie die Ursachen der bisherigen Mißerfolge dieser Versuche. Ausgehend von dieser Analyse stellt sich der Verfasser die Aufgabe, die aus einem Gleichstromgenerator und einem Wechselstrommotor bestehende Maschinengruppe durch eine einzige Maschine zu ersetzen, die nicht nur die stufenlose Regelung der Gleichspannung ermöglicht, sondern auch die selbsttätige Regelung auf Grund gewünschter spezieller Kennlinien und Gesetzmäßigkeiten, wobei sie auch als Verstärkermaschine verwendet werden kann.

Diese Aufgabe wurde schrittweise gelöst

- a) mit Hilfe eines magnetischen Systems, das sich im indifferenten Gleichgewichte befindet und sehr empfindlich auf steuernde Durchflutungsimpulse reagiert,
- b) mit Hilfe von »schlüpfenden Statordurchflutungen«, die das Reibungsmoment kompensieren,
- c) mit Hilfe von Maßnahmen, die bei Stoßbelastungen das Auftreten von Stromwendungsschwierigkeiten und des Pendelns ausschließen,
- d) mit Hilfe einer negativen Rückkoppelung der Änderung der Gleichstromspannung auf die steuernden Durchflutungen, durch die eine neue Maschine — die Autodyne — entsteht, die selbsttätig derart regelt, daß das durch die steuernden Durchflutungen erzeugte Drehmoment verschwinde, wodurch je nach der Schaltung der Rückkoppelung die verschiedensten Aufgaben der Automatik gelöst werden können,
- e) mit Hilfe der Anwendung der »schlüpfenden Statorerregung«, die das Problem der stationären Stromwendung löst und — kombiniert mit dem Prinzip der »Rotorübererregung« — die Abgabe großer Mengen von Blindleistung in das Netz ermöglicht.

Prof. DR. O. BENEDIKT, Budapest, Műegyetem rakpart 3, Ungarn.



# TRANSIENTE VORGÄNGE IN DOPPELKÄFIGMOTOREN

## II. TEIL

I. RÁCZ

Lehrstuhl für Betriebslehre elektrischer Maschinen, Technische Universität, Budapest

(Eingegangen am 10. April 1957)

### 4. Transiente Erscheinungen beim rotierenden Motor

In diesem Abschnitt werden die transienten Erscheinungen des mit Betriebsdrehzahl laufenden Motors untersucht. Auch hier wird angenommen, daß während der elektromagnetischen transienten Vorgänge die Drehzahl genau konstant bleibt. Einfachheit halber wird die Einschaltung eines stromlosen Motors untersucht und die erhaltenen Ergebnisse werden am Ende des Abschnittes mit Hilfe des Superpositionsprinzips auf einige praktische Fälle angewendet. Die Formeln werden mit Operatorenrechnung abgeleitet

#### A) Operatorengleichungen des rotierenden Motors

Schreiben wir zuerst die Spannungsgleichung des Ständers auf. Der Abb. 1 entsprechend wird im der Ständerwicklung zugeordneten stehenden Koordinatensystem:

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} \quad (28)$$

Hier bedeutet  $\bar{\psi}_s$  den mit der Ständerwicklung verketteten vollen Wicklungsfluß und enthält daher den Hauptfluß sowie den Streufluß des Ständers.

Da die Läuferstromkreise verwickelter sind, ist es zweckmäßiger, ein mit dem Läufer gleichlaufendes Koordinatensystem zu verwenden (Abb. 11). Winkel  $\alpha$  kennzeichnet den Verdrehungswinkel des Läufers. Bei einem Vektor wird der von der rotierenden Realachse eingeschlossene Winkel um  $\alpha$  kleiner als der von der stehenden Realachse eingeschlossene Winkel. Somit kann z. B. der im stehenden Koordinatensystem aufgeschriebene Fluß  $\bar{\psi}_s$  in folgender Weise in rotierendes Koordinatensystem umgeschrieben werden ( $\psi_s^*$ ):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi}_s^* &= \bar{\psi}_s e^{-j\alpha} \\ \bar{\psi}_s &= \bar{\psi}_s^* e^{j\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

beziehungsweise

Ähnlich verhält es sich mit den übrigen Vektoren:  $\bar{u}_s = \bar{u}_s^* e^{jx}$ ,  $\bar{i}_s = \bar{i}_s^* e^{jx}$ . Nun sind diese in Gleichung (28) einzusetzen:

$$\bar{u}_s^* e^{jx} = \bar{i}_s^* e^{jx} R_s + \frac{d\bar{\psi}_s^* e^{jx}}{dt} = \bar{i}_s^* e^{jx} R_s + \frac{d\bar{\psi}_s^*}{dt} e^{jx} + j \frac{dx}{dt} \bar{\psi}_s^* e^{jx}.$$

Hier ist  $\frac{dx}{dt} = \omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Läufers (im elektrischen Winkel ausgedrückt), die vorläufig auch als veränderlich betrachtet werden kann.

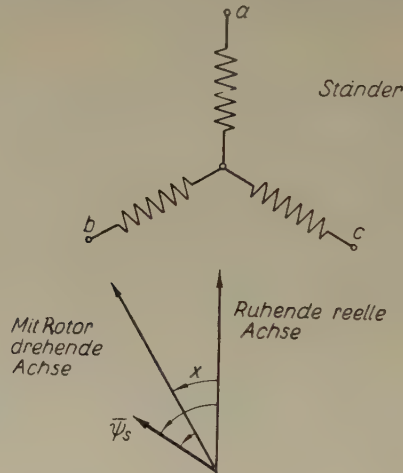


Abb. 11

Nach Vereinfachung durch  $e^{jx}$  und im weiteren die Bezeichnung \* vernachlässigend, erhalten wir die Spannungsgleichung des Ständers im mit dem Läufer gleichlaufenden Koordinatensystem:

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} + j \omega \bar{\psi}_s. \quad (30)$$

Der Ständerfluß  $\bar{\psi}_s$  wird von den Ständer- und Läuferströmen gemeinsam erzeugt. Die Stromkreise des Läufers sind kurzgeschlossen und nachdem ein mit dem Läufer gleichlaufendes Koordinatensystem zur Anwendung gelangt, kann dieselbe Spannungsgleichung aufgeschrieben werden wie im Falle eines an der Sekundär- (und Tertiär-) Seite kurzgeschlossenen Transformators. Bei Anwendung der LAPLACESchen Transformation können aus den erhaltenen Gleichungen die Läuferströme mit dem Ständerstrom ausgedrückt werden, somit wird der Fluß  $\bar{\psi}_s$  nur vom Strom  $\bar{i}_s$  abhängen:

$$\bar{\psi}_s = l(p) \bar{i}_s. \quad (31)$$

Bezeichnen wir die Induktivität  $l(p)$  als die operatorische Induktivität der Maschine, wie dies auch in der Theorie der Synchronmaschinen üblich ist. Wird nun die LAPLACE-Transformierte der Gleichung (30) herangezogen, was nur im Falle einer ständigen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  einfach durchgeführt werden kann, so erhalten wir:

$$\bar{u}_s = [R_s + (p + j\omega) l(p)] \bar{i}_s. \quad (32)$$

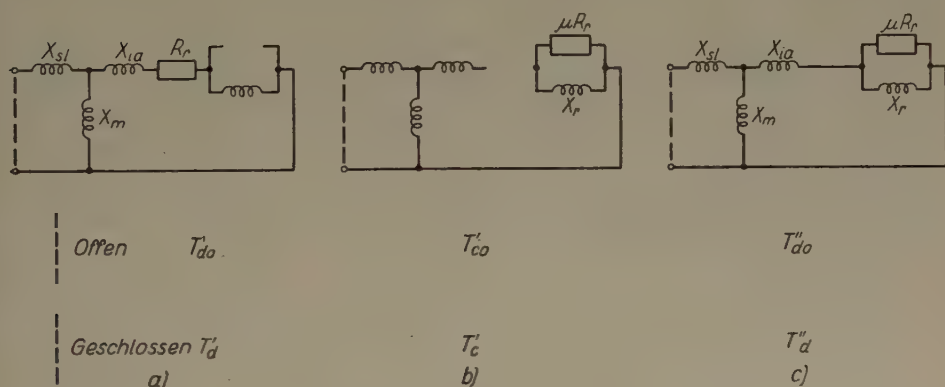


Abb. 12

Zwecks Bestimmung der operatorischen Induktivität  $l(p)$  ist es zweckmäßiger, zum stillstehenden Motor ( $\omega = 0$ ) zurückzukehren. Wird der Wirkwiderstand des Ständers gleich Null gemacht, erhalten wir aus Gleichung (32):

$$\bar{u}_s = p l(p) \bar{i}_s = \bar{Z}(p) \bar{i}_s.$$

Somit ist  $p l(p)$  die operatorische Impedanz des stillstehenden Motors. Wir erhalten aus Gleichung (5) den Wert von  $p l(p)$ , indem in den Gleichungen (6a) Null an Stelle von  $R_s$  gesetzt wird. Anstatt  $p$  wird wieder die Bezeichnung  $\varrho = p/\omega_1$  eingeführt. Werden im Ausdruck der Impedanz entsprechende Umformungen durch- und »fiktive« Zeitkonstanten eingeführt, erhalten wir die bei Synchronmaschinen übliche Form:

$$p l(p) = \varrho \omega_1 l(\varrho) = X_d \varrho \frac{\varrho^2 \omega_1^2 T'_d T''_d + \varrho \omega_1 (T'_c + T'_d) + 1}{\varrho^2 \omega_1^2 T'_{d0} T''_{d0} + \varrho \omega_1 (T'_{c0} + T'_{d0}) + 1}. \quad (33)$$

Hier entspricht der synchronen Reaktanz  $X_d$  der Wert  $X_d = X_{sl} + X_m$ , der die Leerlaufreaktanz des Ständers darstellt. Im Nenner der Formel (33) stehen die Leerlauf-Zeitkonstanten. Diese sind unter Voraussetzung von offenen Ständerklemmen nach den Ersatzschaltungen der Abb. 12 zu bestimmen



(im Schema *a* ist  $\mu R_r = \infty$ , im Schema *b*  $R_r = \infty$  und im Schema *c*  $R_r = 0$ ). Somit wird :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 T'_{d0} &= \frac{X_m + X_{ia} + X_r}{R_r}; \quad \omega_1 T'_{c0} = \frac{X_r}{\mu R_r}; \\ \omega_1 T''_{d0} &= \frac{\frac{X_r (X_m + X_{ia})}{X_r + X_m + X_{ia}}}{\mu R_r} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Die im Zähler der Formel (33) stehenden Kurzschlußzeitkonstanten sind laut Abb. 12 unter Voraussetzung geschlossener Ständerklemmen zu bestimmen. Es können ähnliche Formeln wie unter (34) angewendet werden, nur ist  $\frac{X_m X_{sl}}{X_m + X_{sl}}$  an Stelle von  $X_m$  zu setzen.

Mit den Angaben des Zahlenbeispiels :

$$X_d = 360 \% = 3,6;$$

$$\omega_1 T'_{d0} = 202,8; \quad \omega_1 T'_{c0} = 1,586; \quad \omega_1 T''_{d0} = 1,544;$$

$$\omega_1 T'_d = 13,73; \quad \omega_1 T'_c = 1,586; \quad \omega_1 T''_d = 0,945,$$

somit wird :

$$\varrho \omega_1 l(\varrho) = \varrho 3,6 \frac{\varrho^2 12,98 + \varrho 15,32 + 1}{\varrho^2 313,5 + \varrho 204,4 + 1}.$$

### B) Stationärer Betrieb

Im stationären Betrieb ist die Drehzahl des Motors konstant,  $\omega = (1 - s)\omega_1$ . Die Spannung ist im stehenden Koordinatensystem  $\bar{u}_s = U_s e^{j\omega_s t}$ . Geht man auf das mit dem Läufer gleichlaufende Koordinatensystem über, so ist laut Formel (29) mit  $e^{-jx}$  zu multiplizieren, wo  $x = \omega t$ . Somit wird die an den Ständer gelegte Spannung im rotierenden Koordinatensystem

$$\bar{u}_s = U_s e^{js\omega_1 t}, \quad (35)$$

und deren Laplace-Transformierte :

$$\bar{u}_s = U_s \frac{P}{p - js\omega_1} = U_s \frac{\varrho}{\varrho - js}. \quad (36)$$

Die Operatorenform des Ständerstromes erhalten wir aus Gleichung (32) :

$$\bar{i}_s = U_s \frac{\varrho}{\varrho - js} \frac{1}{R_s + (\varrho \omega_1 + j \omega) l(\varrho)} . \quad (37)$$

Die Zeitfunktion erhalten wir mittels des Entwicklungssatzes (2). Von den Wurzeln des Nenners gehört zu  $\varrho = js$  der stationäre Betriebsstrom, wobei den übrigen Wurzeln freie Ströme zugeordnet sind, die abklingen und binnen kurzem verschwinden. Infolgedessen wird nach dem Entwicklungssatz der stationäre Betriebsständerstrom, da  $js \omega_1 + j \omega = j \omega_1$ ,

$$\bar{I}_s e^{js\omega_1 t} = U_s \frac{1}{R_s + j \omega_1 l(js)} e^{js\omega_1 t} ,$$

die stationäre Betriebs-Admittanz bzw. -Impedanz des Motors wird daher bei Schlupf  $s$  :

$$\bar{Y}(s) = \frac{1}{R_s + j \omega_1 l(js)} \text{ bzw. } \bar{Z}(s) = R_s + j \omega_1 l(js) . \quad (38)$$

So ist z. B. die Kurzschlußimpedanz ( $s = 1$ ) des stillstehenden Motors :

$$\bar{Z}_K = R_s + j \omega_1 l(j) . \quad (39)$$

### C) Zeitkonstanten der Einschaltströme

Nach Formel (7) werden die Zeitkonstanten der freien Ströme durch die Wurzeln der Gleichung

$$R_s + [\varrho + j(1 - s)] \omega_1 l(\varrho) = 0 \quad (40)$$

bestimmt. Im Einklang mit der bekannten Tatsache steht, daß die freien Ströme die Lösungen des homogenen Differentialgleichungs-Systems bilden, an Stelle der Netzspannung ist daher Null zu denken, d. h. das Abklingen der freien Ströme in der rotierenden Maschine ist bei kurzgeschlossenen Ständerklemmen zu beobachten. Infolgedessen übt selbst die Netzspannung auf den Charakter der freien Ströme keine Wirkung aus, so daß von diesem Gesichtspunkt die Synchrondrehzahl keine besondere Bedeutung hat. Nachdem unter den üblichen Betriebsverhältnissen die Drehzahl der Maschine nur um einige Prozente von der Synchrondrehzahl abweicht, kann die Rechnung mit Annahme

von  $\omega_1 = \omega$ , d. h.  $s = 0$  durchgeführt werden. Auf diese Weise nimmt die Gleichung (40) folgende Form an:

$$R_s + (\varrho + j) \omega_1 l(\varrho) = 0. \quad (41)$$

Die genaue Lösung dieser Gleichung ist langwierig, da sie zu einer Gleichung dritten Grades mit komplexen Koeffizienten führt. Der imaginäre Teil einer der drei Wurzeln,  $\varrho_1$ , ist nahezu  $-j$ . Dieser hat den Charakter  $e^{-j\omega_1 t}$ , bedeutet also einen mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega_1$  der Läuferichtung entgegengesetzt rotierenden Strom, d. h. im Ständer einen Gleichstrom. Der imaginäre Teil der beiden anderen Wurzeln ist beinahe Null, so daß diese im Läufer einen nahezu Gleichstrom bedeuten.

Der Wert der ersten Wurzel kann auf folgende Weise angenähert werden: Da es sich im Ständer um fast einen Gleichstrom handelt, fließt im Läufer ein Wechselstrom mit einer Frequenz von nahezu  $f_1$ . Die Läuferückwirkung hängt daher nur in sehr geringem Maße vom genauen Wert der Frequenz ab, weshalb im Ausdruck  $l(\varrho)$  der Gleichung (41) anstatt  $\varrho$  ein der Frequenz  $f_1$  entsprechender Wert  $\varrho = -j$  gesetzt werden kann. Somit wird:

$$R_s + (\varrho + j) \omega_1 l(-j) \approx 0,$$

woraus

$$\varrho_1 \approx -\frac{R_s}{\omega_1 l(-j)} - j. \quad (42)$$

Der Wert  $l(-j)$  ist die Konjugierte von  $l(j)$  in Gleichung (39). Wird dieser Wert unter Zugrundelegung der Gleichung (39) ausgedrückt und in Formel (42) eingesetzt, erhalten wir

$$\varrho_1 \approx \frac{j R_s}{\hat{Z}_K - R_s} - j. \quad (43)$$

Mit den Daten des Zahlenbeispiels erhalten wir, da die Kurzschlußimpedanz  $Z_K = 7,49 + j 17,77\%$  beträgt, den folgenden Wert:

$$\varrho_1 \approx \frac{j 1,4}{7,49 - j 17,77 - 1,4} - j = -0,0705 + j 0,0241 - j.$$

Der zugeordnete freie Strom hat im mit dem Läufer gleichlaufenden Koordinaten-System die Form  $\bar{A}_1 e^{\varrho_1 \omega_1 t}$  bzw. im stehenden Koordinatensystem die Form

$$\bar{A}_1 e^{\varrho_1 \omega_1 t} e^{j \omega_1 t} = \bar{A}_1 e^{-0,0705 \omega_1 t} e^{j 0,0241 \omega_1 t}.$$



Es handelt sich hier also um einen »Gleichstrom«, der sich mit einer Geschwindigkeit von 2,41% der Synchronrehzahl vorwärtsdreht, und dessen Abklingzeitkonstante

$$T_1 = \frac{1}{0,0705 \cdot 314} = 0,0452 \text{ s},$$

also etwas mehr als 2 Perioden beträgt.

Den beiden anderen Wurzeln der Gleichung (41) ist im Läufer Gleichstrom und im Ständer ein Wechselstrom mit einer Frequenz von nahezu  $f_1$  zugeordnet. Deswegen kann der Wirkwiderstand  $R_s$  im Vergleich zur Streuinduktanz des Ständers vernachlässigt werden. Somit wird die Gleichung (41) viel einfacher:

$$l(\varrho) \approx 0$$

bzw. unter Berücksichtigung von (33) und jetzt mit  $p$  ausgedrückt:

$$p^2 T'_d T''_d + p (T'_d + T'_c) + 1 = 0. \quad (44)$$

Die Gleichung hat zwei Realwurzeln. Von den Werten  $p_2 \approx -\frac{1}{T'_d}$  und  $p_3 \approx -\frac{1}{T''_d}$  als erste Annäherung ausgehend, erhalten wir nach dem NEWTON-Gesetz folgende bessere Annäherungen:

$$\left. \begin{aligned} p_2 &\approx -\frac{1}{T'_d} \frac{1}{1 + \frac{T'_c - T''_d}{T'_d}}; & T_2 &= -\frac{1}{p_2}; \\ p_3 &\approx -\frac{1}{T''_d} \frac{1}{1 - \frac{T'_c - T''_d}{T'_d}}; & T_3 &= -\frac{1}{p_3}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Mit Angaben des Zahlenbeispiels:

$$T_2 = -\frac{1}{p_2} \approx 0,0458 \text{ s}; \quad T_3 = -\frac{1}{p_3} \approx 0,00287 \text{ s}$$

bzw.

$$\varrho_2 = p_2 \omega_1 \approx -0,0697.$$

Zwecks Beurteilung der Güte der Annäherungen wurden in Tab. II die genauen Wurzeln der komplexen Gleichung (41) und die mit Formeln (43) und (45) berechneten Näherungswurzeln zusammengestellt.

Tabelle II

	$\varrho_1$	$\varrho_2$	$\varrho_3$
Genaue Werte	$-0,070-j0,976$	$-0,0695-j0,0034$	$-1,136-j0,0224$
Näherungs-Werte	$-0,0705-j0,9759$	$-0,0697$	$-1,11$

Den obigen Zeitkonstanten entsprechen bei Synchronmaschinen folgende Zeitkonstanten :

$T_2$  — transiente Zeitkonstante,

$T_3$  — subtransiente Zeitkonstante,

$T_1$  — Zeitkonstante des Ständergleichstromes.

Es sei bemerkt, daß dem Rotieren der »Gleichstrom«-Komponenten keine praktische Bedeutung zuzuschreiben ist. So ist z. B. die Winkelverdre-  
hung der Gleichstromkomponenten  $\bar{A}_1$  im Ständer in der Zeit  $T_1$ , während  
welcher der Wert auf 37% herabfällt, nur

$$T_1 \Delta \omega = 0,0452 \cdot 0,0241 \cdot 314 \approx 0,34 \text{ Radian} \approx 20^\circ.$$

#### D) Einschaltströme

Die Operatorenform des Einschaltstromes wurde bereits mit Formel (37) aufgeschrieben (im mit dem Läufer gleichlaufenden Koordinatensystem):

$$\bar{i}_s = U_s \frac{\varrho}{\varrho - js} \frac{1}{R_s + [\varrho + j(1-s)] \omega_1 l(\varrho)}. \quad (37')$$

Auf Grund des Entwicklungssatzes kann die Zeitfunktion des Stromes in folgender Form aufgeschrieben werden :

$$\bar{i}_s(t) = \bar{A}_4 e^{js\omega t} + \bar{A}_1 e^{\varrho_1 \omega_1 t} + \bar{A}_2 e^{\varrho_2 \omega_1 t} + \bar{A}_3 e^{\varrho_3 \omega_1 t}. \quad (46)$$

Ein interessantes Ergebnis erhalten wir bei Vernachlässigung des Ständer-Wirkwiderstandes. Schreiben wir zunächst den Ständerstrom auf einen stillstehenden Motor bezogen, dann auf einen mit Synchrondrehzahl laufenden Motor bezogen auf.

Im Falle des stillstehenden Motors ist  $s = 1$ , somit ergibt sich aus (37')

$$\bar{i}_s = U_s \frac{1}{\varrho - j} \frac{1}{\omega_1 l(\varrho)}. \quad (47)$$

Im Falle des synchronlaufenden Motors ist  $s = 0$ , somit:

$$\bar{i}_s = U_s \frac{1}{\varrho + j} \frac{1}{\omega_1 l(\varrho)}. \quad (48)$$

Die Einschaltströme sind daher in beiden Fällen gleich groß, nur stellen sie die Konjugierten voneinander dar. Dies kann auch auf folgende Weise nachgewiesen werden. Im stehenden Koordinatensystem ergibt sich die Spannungsgleichung des Ständers bei Vernachlässigung von  $R_s = 0$  nach Gleichung (28) zu:

$$\bar{u}_s = \frac{d\bar{\psi}_s}{dt}.$$

Nachdem  $\bar{u}_s = U_s e^{j\omega_1 t}$  und im Zeitpunkt  $t = 0$  der Fluß Null ist, erhalten wir für den Fluß durch Integration folgende Formel:

$$\bar{\psi}_s = \frac{U_s}{j\omega_1} e^{j\omega_1 t} - \frac{U_s}{j\omega_1} = \bar{\psi}_{sw} + \bar{\psi}_{sl}.$$

Der Ständerfluß besteht also aus zwei gleichgroßen Dreh-(Wechselstrom) und Gleichstrom-Komponenten. Beim stillstehenden Motor dreht sich  $\bar{\psi}_{sw}$  auf den Läufer bezogen mit synchroner Winkelgeschwindigkeit, wogegen  $\bar{\psi}_{sl}$  stillsteht. Beim synchronlaufenden Motor sind die Rollen vertauscht, indem  $\bar{\psi}_{sw}$  im Verhältnis zum Läufer stillsteht und  $\bar{\psi}_{sl}$  sich mit der Synchronzahl in negativer Richtung zum Läufer dreht. Aus diesem Grunde können diese Flüsse in beiden Fällen von gleichgroßen Ständerströmen erzeugt werden.

Die für den stillstehenden Motor abgeleiteten Beziehungen können daher mit Substituierung von  $R_s = 0$  zur Berechnung der Stromkomponenten des synchronlaufenden Motors verwendet werden. Dieses Verfahren ist selbstverständlich bei der Berechnung der Zeitkonstanten nicht brauchbar, da hier der Wirkwiderstand  $R_s$  nicht vernachlässigt werden kann.

Der stationäre Strom des laufenden Motors beträgt im Falle  $s = 0$

$$\bar{A}_4 = \frac{U_s}{R_s + j(X_{sl} + X_m)} \approx \frac{U_s}{j(X_{sl} + X_m)}, \quad (49)$$

was den Leerlaufstrom der Maschine bedeutet. Denselben Wert würde auch die Komponente  $\bar{A}_1$  des stillstehenden Motors bei Substituierung von  $R_s = 0$  [siehe Formel (14)] nach Einführung der Konjugierten ergeben.

Die Gleichstromkomponente  $\bar{A}_1$  des Ständerstromes im laufenden Motor entspricht der Wechselstromkomponente  $\bar{A}_4$  im stillstehenden Motor und

daher kann die Konjugierte der Formel (13) benutzt werden. Da jedoch die Kurzschlußimpedanz  $\bar{Z}_K$  auch den Ständer-Wirkwiderstand  $R_s$  enthält, ist dieser abzuziehen. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\bar{A}_1 \approx \frac{U_s}{\bar{Z}_K - R_s} \quad (50)$$

Die transiente Wechselstromkomponente  $\bar{A}_2$  des Ständerstromes im laufenden Motor entspricht der Komponente  $\bar{A}_2$  im stillstehenden Motor. Demnach erhalten wir aus Formel (15) nach Substituierung von  $R_s = 0$  und Einführung der Konjugierten:

$$\bar{A}_2 \approx \frac{1}{\varrho_2 + j} \frac{U_s}{X_{sl} + X_{ia} + X_r} \frac{1}{1 + \left( \frac{X_r}{X_{sl} + X_{ia} + X_r} \right)^2 \left( \frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{\mu} \right)} \quad (51)$$

Hier ist  $\varrho_2 \approx -\frac{1}{\omega_1 T_2}$ , was neben  $j$  auch vernachlässigt werden kann.

Die Komponente  $\bar{A}_3$  kann am einfachsten erhalten werden, indem  $\bar{i}_s(t)$  nach der Einschaltung im Zeitpunkt  $t = 0$  noch Null bleibt, wonach nach Gleichung (46):

$$\bar{A}_4 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 = 0, \quad (52)$$

wird.

Die Güte der Annäherungen ist in Tab. III veranschaulicht. Die genauen Werte wurden aus Gleichung (37') berechnet, die Näherungswerte mit Hilfe der Formeln (49) bis (52).

Tabelle III

	$\bar{A}_4$	$\bar{A}_1$	$\bar{A}_2$	$\bar{A}_3$
Genaue Werte	$0-j0,28$	$1,61+j5,22$	$-0,06-j3,48$	$-1,55-j1,46$
Näherungs-Werte	$0-j0,28$	$1,72+j5,04$	$-0,25-j3,60$	$-1,47-j1,16$

Die Vektoren der einzelnen Komponenten können auch im Konstruktionswege, ähnlich wie in Abb. 7, bestimmt werden. Zunächst werden der stationäre Strom  $\bar{A}_4$  und der Ständergleichstrom  $\bar{A}_1$  mittels der Formeln (49) bzw. (50) berechnet, dann werden zwecks Bestimmung der Richtung der beiden anderen Komponenten die Vektoren  $1/(\omega_1 T_2) + j$  und  $1/(\omega_1 T_3) + j$  gezeichnet (Abb. 13). Werden zu diesen Parallele aus dem Endpunkt von  $\bar{A}_4$  bzw. Ausgangspunkt von  $\bar{A}_1$  gezogen, erhalten wir die Komponenten  $\bar{A}_2$  und  $\bar{A}_3$ .



Abb. 14 stellt den Einschaltstrom des synchronlaufenden stromlosen Motors für eine Zeitdauer von 2 Perioden dar. Die eingetragenen Ziffern bedeuten die Zahl der vom Zeitpunkt der Einschaltung verstrichenen Achtelperioden, der mit gestrichelter Linie gezeichnete kleine Kreis stellt den Kreis

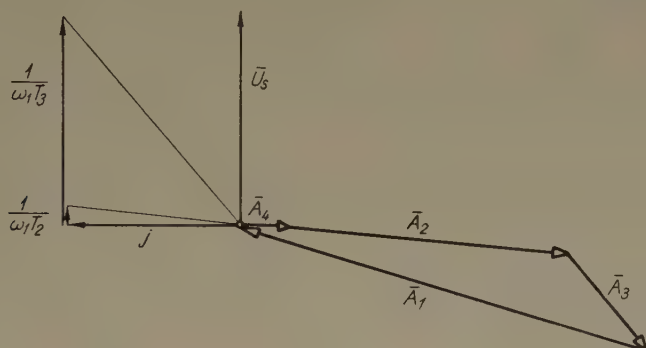


Abb. 13

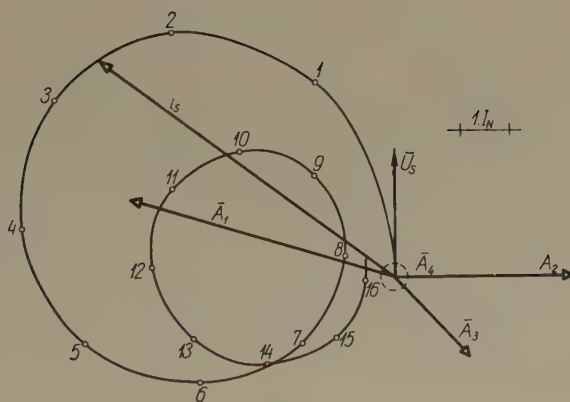


Abb. 14

des stationären Zustandes dar. Die höchste Stromstärke beträgt  $7,6I_N$  und tritt nach einer nicht vollen Halbperiode auf. Der Zeitpunkt des Maximums kann zu  $t_m = \frac{\pi/2 + \varphi_K}{\omega_1}$  geschätzt werden. Bis zu diesem Zeitpunkt klingt die subtransiente Komponente  $\bar{A}_3$  praktisch vollkommen ab. Die übrigen Komponenten sind in diesem Zeitpunkt nahezu gleichgerichtet, somit wird der höchste Stromstoß

$$i_{s \max} = |\bar{A}_4| + |\bar{A}_1| e^{-\frac{t_m}{T_1}} + |\bar{A}_2| e^{-\frac{t_m}{T_2}}. \quad (53)$$

In Abb. 15 ist der zeitliche Verlauf des Stromes in Phase *a* dargestellt, wenn die Einschaltung in der ungünstigsten Phasenlage erfolgt. Abb. 16 zeigt das Einschaltmoment in Funktion der Zeit. Nachdem die Einschaltung eines synchronlaufenden Motors untersucht wurde, ist der stationäre Wert des Momentes Null.

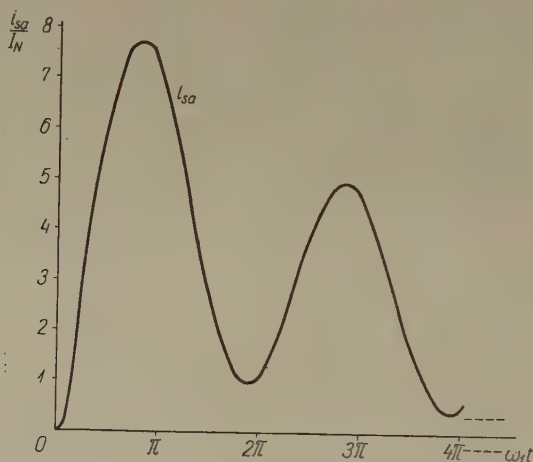


Abb. 15

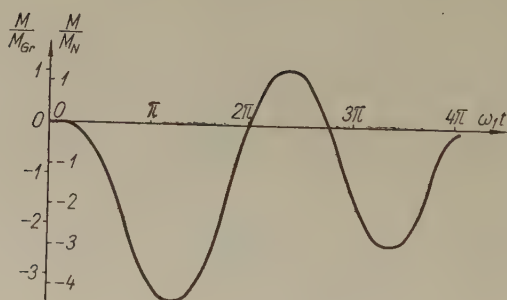


Abb. 16

Falls der Motor zur Zeit der Einschaltung mit nicht genau synchroner Drehzahl läuft, der Schlupf jedoch gering ist, dann können zur Berechnung der Zeitkonstanten unverändert die Näherungsformeln (43) und (45) gebraucht werden. Bei der Berechnung der Stromkomponenten soll von der Operatorenform (37') ausgegangen werden. Ihre Untersuchung führt zu folgenden Feststellungen.

Die stationäre Komponente  $\bar{A}_4$  vergrößert sich, ihr Wert kann dem gewöhnlichen stationären Betriebs-Stromvektordiagramm dem Schlupf entsprechend entnommen werden.

Die Gleichstromkomponente  $\bar{A}_1$  des Ständerstromes bleibt praktisch dieselbe wie im Falle der Einschaltung des synchronlaufenden Motors; der Ausgangswert kann auch hier mit der Formel (50) berechnet werden. Bei der Berechnung der transienten Komponente  $\bar{A}_2$  des Ständerstromes ist die Formel (51) mit einem Korrekturfaktor zu ergänzen:

$$\bar{A}_2 \approx \frac{1}{\left(1 - j \frac{s}{\varrho_2}\right) [\varrho_2 + j(1-s)]} \frac{U_s}{X_{sl} + X_{ia} + X_r} \frac{1}{1 + \left[ \frac{X_r}{X_{sl} + X_{ia} + X_r} \right]^2 \left( \frac{1}{\mu^2} + \frac{2}{\mu} \right)} \quad (54)$$

Die subtransiente Komponente  $\bar{A}_3$  kann aus der Bedingung  $\sum \bar{A}_i = 0$  bestimmt werden.

Der bei Einschaltung des mit nicht genau synchroner Drehzahl laufenden Motors auftretende Stromstoß  $i_{\text{smax}}$  ist kaum etwas höher als jener beim synchronlaufenden Motor. Unter den Komponenten hat nämlich die Gleichstromkomponente den höchsten Wert, und diese ist in beiden Fällen praktisch gleich, wogegen der stationäre Strom etwas höher ist.

### E) Dreiphasen-Kurzschluß

An die Ständerklemmen des Motors im Betrieb ist eine Spannung  $\bar{u}_s = U_s e^{j\omega_s t}$  gelegt, der Motor nimmt den der Belastung bzw. dem Schlupf  $s$  entsprechenden stationären Betriebsstrom auf (Komponente  $\bar{A}_4$ ). Vom Zeitpunkt des Eintretens des Dreiphasen-Kurzschlusses ( $t = 0$ ) an ist die Klemmenspannung gleich Null. Dies kann man sich so vorstellen, daß die vorherige Spannung  $U_s e^{j\omega_s t}$  weiter wirkt, jedoch vom Zeitpunkt  $t = 0$  an auch eine Spannung  $-U_s e^{j\omega_s t}$  an den Ständerklemmen erscheint. Daher sollen auf den normalen Betriebszustand die bei Einschaltung einer Spannung  $-U_s e^{j\omega_s t}$  auftretenden Ströme superponiert werden. Der Kurzschlußstrom ergibt sich daher zu:

$$\bar{i}_K = \bar{A}_4 e^{j\omega_1 t} - [\bar{A}_4 e^{j\omega_1 t} + \bar{A}_1 e^{\varrho_1 \omega_1 t} + \bar{A}_2 e^{\varrho_2 \omega_1 t} + \bar{A}_3 e^{\varrho_3 \omega_1 t}],$$

d. h.

$$\bar{i}_K = -\bar{A}_1 e^{\varrho_1 \omega_1 t} - \bar{A}_2 e^{\varrho_2 \omega_1 t} - \bar{A}_3 e^{\varrho_3 \omega_1 t}. \quad (55)$$

Der Kurzschlußstrom enthält daher die gleichen freien Ströme mit entgegengesetztem Vorzeichen wie der Einschaltstrom, hat aber keine stationäre Komponente, der Strom klingt vollkommen ab. Der Wert der stationären Komponente ist übrigens gering, besonders in dem Falle, wenn der Motor vor dem Kurzschluß mit kleiner Belastung oder leer gelaufen ist. Somit kann der

höchste Stromstoß praktisch mit demselben Wert aufgenommen werden wie beim Einschalten des synchronlaufenden Motors.

Bei der Berechnung der Kurzschlußströme von Netzen sind auch die großen Asynchronmotoren in Betracht zu ziehen, da auch diese den Kurzschlußstrom beeinflussen. Nachdem bei der Asynchronmaschine sogar die Zeitkonstante der langsamer abklingenden freien Ströme nur etwa zwei Perioden ausmacht, brauchen die Motoren ausschließlich bei der Berechnung der dynamischen Stromspitze berücksichtigt werden, wogegen bei der Berechnung der Kurzschlußleistung der Unterbrecher, außer wenn es sich um sehr große Unterbrecher handelt, die Asynchronmotoren außer acht gelassen werden können. Zur Berechnung der dynamischen Stromspitze wird häufig der Scheitelfaktor 1,8 benutzt. Dementsprechend kann eine gleichwertige Maschinenreaktanz  $X''$  bestimmt werden.

Mit den Angaben des Zahlenbeispiels ergab sich im Abschnitt D) ein Stromstoß von 7,6  $I_N$ . Demnach wird

$$X'' = \frac{100}{7,6/1,8} = 23,5 \%,$$

was einen etwa 1,2fachen Wert der Kurzschlußimpedanz  $Z_K = 19,3\%$  des stillstehenden Motors bedeutet. Bei größeren Motoren kann der Faktor 1,2 mit guter Annäherung angenommen werden, bei kleineren Motoren ist ein höherer Faktor zu nehmen.

### F) Ausschaltung

Beim Ausschalten des Asynchronmotors wird die Klemmenspannung des Ständers nicht sofort verschwinden, da in den kurzgeschlossenen Stromkreisen des Läufers abklingende Gleichströme entstehen, die den Fluß der Maschine aufrechtzuerhalten trachten. Da nach der Unterbrechung der Ständerstrom Null ist,  $i_s = 0$ , wird die Zeitkonstante der Komponenten des Vorganges auf Grund der Formel (37) durch die Bedingung bestimmt, daß  $l(\varrho) = \infty$ , d. h. der Nenner der operatorischen Induktivität (33) gleich Null sei. Es wird daher:

$$\varrho^2 \omega_1 T'_{d0} T''_{d0} + \varrho \omega_1 (T'_{c0} + T'_a) + 1 = 0.$$

Die Wurzeln der Gleichung können ähnlich den Formeln (45) aufgeschrieben werden, doch kann jetzt der Korrekturfaktor ganz vernachlässigt werden. Daher werden die Leerlauf-Zeitkonstanten [s. (34)]:

$$T_{10} \approx T'_{d0} \quad \text{und} \quad T_{20} \approx T''_{d0}.$$

Mit den Angaben des Zahlenbeispiels  $T_{10} = 0,646$  s und  $T_{20} = 0,005$  s.



Die Änderung des Ständerflusses während dieser Zeit kann folgendermaßen bestimmt werden. Aus Spannung  $\bar{U}_s$  und Strom  $\bar{I}_s$  des Zustandes vor Unterbrechung werden die hinter der subtransienten Reaktanz  $X'' = X_{sl} + \frac{X_m X_r}{X_m + X_r}$  bzw. der transienten Reaktanz  $X' = X_{sl} + \frac{X_m (X_r + X_{ia})}{X_m + X_r + X_{ia}}$  bestehenden subtransiente Spannung  $\bar{U}_s''$  bzw. transiente Spannung  $\bar{U}_s'$  konstruiert (s. Abb. 17). Mit diesen kann der Ständerfluß nach der Ausschaltung im mit dem Läufer gleichlaufenden Koordinatensystem folgendermaßen ausgedrückt werden :

$$\bar{\psi}_s = \frac{1}{j\omega_1} \left[ (\bar{U}_s'' - \bar{U}_s') e^{-\frac{t}{T_{20}}} + \bar{U}_s' e^{-\frac{t}{T_{10}}} \right]. \quad (56)$$

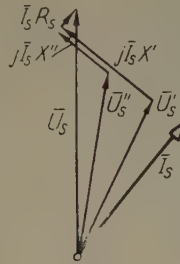


Abb. 17

Im eingeschalteten Zustand entspricht der Ständerfluß der Spannung  $\bar{U}_s - \bar{I}_s R_s$ . Am Ende des Ausschaltens fällt dieser sofort auf den der Spannung  $\bar{U}_s''$  entsprechenden Wert und sodann mit der Zeitkonstante  $T_{20}$ , also praktisch sofort auf den der Spannung  $\bar{U}_s'$  entsprechenden Wert. Hiernach klingt der Ständerfluß der verhältnismäßig großen Zeitkonstante  $T_{10}$  entsprechend langsam ab. Sieht man von der ersten Halbperiode ab, so kann  $\bar{\psi}_s$  einfach in folgender Weise aufgeschrieben werden :

$$\bar{\psi}_s \approx \frac{\bar{U}_s'}{j\omega_1} e^{-\frac{t}{T_{10}}}. \quad (57)$$

Die an den Ständerklemmen nach der Ausschaltung auftretende Spannung ergibt sich zu :

$$\bar{u}_s = \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} + j\omega \bar{\psi}_s \approx j\omega \bar{\psi}_s = \frac{\omega}{\omega_1} \bar{U}_s' e^{-\frac{t}{T_{10}}}.$$

Im stehenden Koordinatensystem ist die Spannungsgleichung :

$$\bar{u}_s = \frac{\omega}{\omega_1} \bar{U}_s' e^{-\frac{t}{T_{10}}} e^{j\omega_1 t}.$$

In Abb. 18 ist der Spannungsvektor  $\vec{u}_s(t)$  bei der Ausschaltung eines kleineren Motors gezeigt. Der Vektor wurde mit einem Kathodenstrahloszillographen aufgenommen, der Ausgangspunkt des Vektors liegt im Koordinatenursprung, der Endpunkt ist durch den Strahl bezeichnet. Der äußere stärkere Kreis gehört zur Netzspannung und mit dieser stimmt bis zur Ausschaltung die Ständerspannung des Motors überein. Der Kreis ist stärker, weil der Strahl ihn über mehrere Perioden hindurch durchlief. Der Strahl wurde je Periode 14mal gelöscht, um ein Zeitzeichen auf die Aufnahme zu

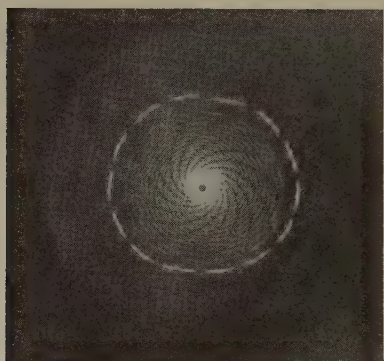


Abb. 18

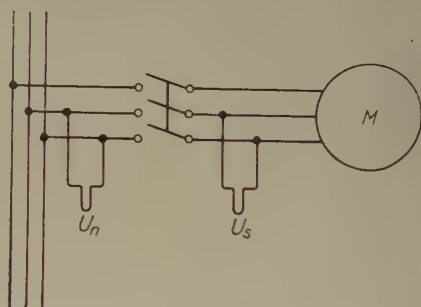


Abb. 19

bringen. Nach Ausschaltung des Motors sinkt die Spannung sofort im Verhältnis von  $\frac{\omega}{\omega_1} \frac{U'_s}{U_n}$  und danach klingt sie langsam exponentiell ab. Aus den Verschiebungen der Zeitzeichen ist es ersichtlich, daß die Frequenz sofort auf  $(1 - s)f_1$  gefallen ist.

Diese bleibende Spannung macht z. B. die genauere Durchführung der Auslaufmessung möglich. Zu diesem Zweck ist einerseits die Ständerspannung des Motors ( $U_s$ ), andererseits die Netzspannung ( $U_n$ ) mit einem Schleifenoszillographen aufzunehmen, wobei der Motor ausgeschaltet wird (Abb. 19). Nachdem zu dieser Zeit während  $1/2 \sim 1$  sec der freie Gleichstrom des Läufers das Feld erregt, ist die Frequenz der Ständerspannung mit der Drehzahl des Motors genau proportional. Wird daher die Länge der einzelnen Perioden der Spannung ( $t_s$ ) gemessen (oder in der Praxis die Länge von 4 bis 5 Perioden), wobei die Länge einer Periode (oder von 4 bis 5 Perioden) der Netzspannung  $t_n$  beträgt, ist die Winkelgeschwindigkeit des Motors in der Mitte der gewählten Strecke

$$\omega = \omega_1 \frac{t_n}{t_s}.$$

Mit diesem Verfahren kann die Anfangsstrecke der Auslaufkurve aufgenommen werden, von der Messung braucht jedoch meistens nur die Anfangstangente ausgewertet werden.

### G) Umschaltung

In den Hilfsbetrieben von Kraftwerken kommt es vor, daß ein oder mehrere Motoren abgeschaltet und danach auf eine andere Stromquelle umgeschaltet werden. In solchen Fällen tritt ein Stromstoß auf, dessen Größe auf folgende Weise geschätzt werden kann. Im ausgeschalteten Zustand gestaltet sich die Spannung des Motors entsprechend dem vorigen Abschnitt (Abb. 20a). Nach der Ausschaltung ( $t = 0$ ) entsteht zwischen den Spannungen des Netzes und des Motors sofort eine Phasendifferenz  $\alpha_0$ , die infolge der Differenz zwischen den Winkelgeschwindigkeiten zunimmt. Bis zum Zeitpunkt  $t_w$  der Wiedereinschaltung erreicht dieser Winkel den Wert

$$\alpha = \alpha_0 + \int_0^{t_w} (\omega_1 - \omega) dt = \alpha_0 + \omega_1 \int_0^{t_w} s dt. \quad (58)$$

Der Wert des Integrals kann auf Grund der gestrichelten Fläche der Auslaufkurve (Abb. 20b) gerechnet werden. Im Zeitpunkt  $t_w$  besteht zwischen der Netzspannung und der Motorspannung die Differenz von

$$\Delta \bar{U} = U_n - U'_s e^{-\frac{t_w}{T_1}} e^{-j\alpha}. \quad (59)$$

Das Wiedereinschalten des Motors kann derart aufgefaßt werden, daß zu der Leerlaufspannung  $U'_s e^{-\frac{t_w}{T_1}} e^{-j\alpha}$  plötzlich die Spannung  $\Delta \bar{U}$  hinzukommt. Deswegen erhalten wir einen gleichen Einschaltstromstoß wie bei der Einschaltung eines stromlosen Motors auf die Spannung  $\Delta U$ . Im obigen haben wir bei der Berechnung der Größe der Ständerspannung absichtlich außer acht gelassen, daß die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Motors mit der synchronen Winkelgeschwindigkeit nicht übereinstimmt. Die transienten Vorgänge werden nämlich von allem nicht durch den Ablauf der Spannung, sondern durch jenen des Flusses bestimmt, somit sind die einzelnen Spannungen in Gleichung (59) mit dem gleichgroßen Faktor  $\omega_1$  aus den Flüssen zu rechnen.

Im allgemeinen wird die Wiedereinschaltung als zulässig betrachtet, wenn sie keinen größeren Stromstoß verursacht als die direkte Einschaltung des stillstehenden Motors. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn  $\Delta U \leq U_n$ . Es sind zweierlei praktische Lösungen möglich. Im ersten Falle ist die Wieder-

einschaltung des Motors so rasch vorzunehmen, daß Winkel  $\alpha$  nicht größer als  $60\text{--}65^\circ$  sei, was im allgemeinen einer Wiedereinschaltzeit von  $t_w < 0,15\text{ s}$  entspricht. Im zweiten Falle darf der Motor erst so spät wieder eingeschaltet

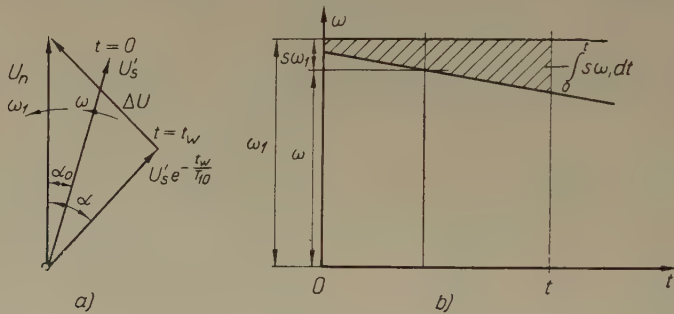


Abb. 20

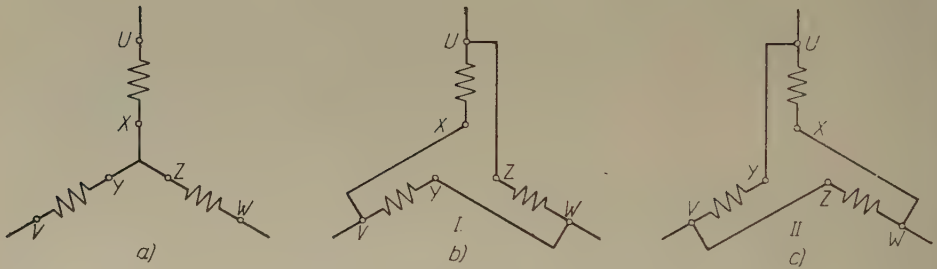


Abb. 21

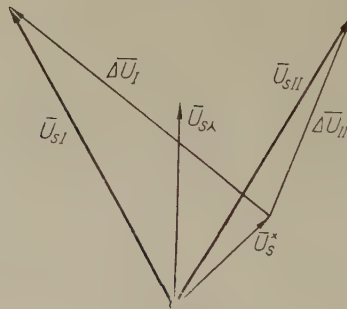


Abb. 22

werden, daß bis dahin die Ständerspannung größtenteils abklinge. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn  $t_w$  etwa das Anderthalbfache der Zeitkonstante  $T_{10}$  beträgt. In diesem Falle tritt sogar bei einer Wiedereinschaltung in Opposition kein zu großer Stromstoß auf.

Ähnliche Umschalterscheinung spielt sich beim Stern-Dreieck-Anlassen der Motoren oder beim Anlassen mit Transformator ab. Untersuchen wir



etwas genauer die Stern-Dreieck-Umschaltung. Der Motor läuft in Sternschaltung bis nahezu synchroner Drehzahl an (Abb. 21, Figur *a*). Danach wird er abgeschaltet, wobei die Ständerspannung vom Wert  $U_{s\Delta}$  auf den Wert  $U_s^*$  fällt und in Phase um den Winkel  $\alpha$  zurückbleibt (Abb. 22). Die Umschaltung in Dreieck kann auf zweierlei Art erfolgen (Abb. 21, Figur *b, c*). Der Zeitvektor der Spannung in Phase  $\alpha$  des Motors, der mit dem von uns gebrauchten Vektor übereinstimmt, wächst auf einen  $\sqrt{3}$ -fachen Wert an und ändert sich im Vergleich zur Sternschaltung um  $30^\circ$  vorwärts oder rückwärts (Abb. 22). Demzufolge ist die den Stromstoß verursachende Spannung  $\Delta \bar{U}$  in beiden Fällen wesentlich verschieden. Wie ersichtlich, ist der Fall I (Abb. 21, Figur *b*) ungünstiger. Hier kann die Höhe der Spannung  $\Delta U_I$  den vollen Wert der Spannung in Dreieckschaltung erreichen, es kann also ein gleichgroßer Stromstoß auftreten wie beim Anlassen des stillstehenden Motors in Dreieckschaltung. Obzwar dieser Zustand nur ein bis zwei Perioden dauert, werden die Spulenköpfe dadurch stark beansprucht und ist auch für den Schutz sehr unangenehm.

### Zusammenfassung

Es werden die elektromagnetischen transienten Vorgänge mit Betriebsdrehzahl laufenden Doppelkäfigmotors behandelt. Nach der Untersuchung der operatorischen Impedanz werden einfache Annäherungsformeln für die Einschalt- und Kurzschlußströme sowie deren Zeitkonstanten gegeben. Zur Veranschaulichung der Größenordnungen dient ein Zahlenbeispiel.

I. RÁCZ, Budapest XI., Stoczek utca 2. Ungarn



# SOME REMARKS CONCERNING THE QUICK-RESPONSE OVEREXCITATION OF SYNCHRONOUS GENERATORS

By

F. CSÁKI

Department of Special Electric Machines, Polytechnic University, Budapest

(Received January 5, 1958)

In case of the procedure called quick-response overexcitation, the excitation of the synchronous generator is raised suddenly well over the working value. This is necessary in short-circuits, or switching operations accompanied by great reactive power consumption (e. g. selfsynchronization). The sudden increase of excitation is generally realized by short-circuiting the exciter field rheostat (Fig. 1). The aim of quick-response overexcitation is to re-establish the network voltage by raising the generator excitation, to facilitate the acceleration of asynchronous motors, slowed down to the working speed, and so to produce from the point of view of network stability a favourable effect.

Author in the Institute of Electrical Power Research mapped out a quick-response overexciting equipment. Description of the equipment and its operation is not dealt with here, as this may be found in other places [1, 2, 3]. The present article discusses only some questions concerning quick-response overexcitation and especially examines the conditions of quick-response overexcitation, in which the synchronous generator is in no case exposed to inadmissible load.

## 1. Questions of overheating. Time of quick-response overexcitation

From the point of view of overheating of the rotor and stator the quick-response overexcitation has not a great importance. This — as will be shown below — is mainly due to the fact that the quick-response overexcitation lasts relatively for a short time.

### 1.1. *Overheating of the rotor*

The overheating per second, neglecting the heat transfer (in case of copper wire) may be computed by formula

$$\frac{1}{160} i^2 \quad \text{or} \quad \frac{1}{140} i^2$$

where  $i$  is the current density. The first formula refers to a smaller (about  $50^\circ\text{C}$ ), the second to a greater (about  $130\dots140^\circ\text{C}$ ) initial temperature.

At rated operation of the generator (in case of rated stator voltage), stator current and at the worst power factor prescribed the current density in the exciting coil of the rotor may be taken exaggeratedly  $6\text{ A/mm}^2$ . If the relation of overexcitation is 2, the maximal current density is  $i_{\max} = 12\text{ A/mm}^2$ , i. e., the overheating is about  $1^\circ\text{C/sec}$ . If the duration of the quick-response overexcitation is limited to 15 sec, the temperature of the rotor increases only with  $15^\circ\text{C}$ . But in most cases quick-response overexcitation will end in a considerably shorter time, after some seconds, so the thermal load of the rotor will become much smaller. (By changing to exciters with unsaturated poles and raising the relation of overexcitation e. g. to 2,5 we can count on a temperature rise of  $1,6^\circ\text{C/sec}$ . Limiting the maximum duration of overexcitation to 9—12 sec, the overheating of the rotor would furthermore not exceed the value of  $15\text{—}20^\circ\text{C}$ .)

### 1.2. Overheating of the stator

Standards prescribe that every rotating machine must withstand without damage the  $1\frac{1}{2}$ -times of the rated current, starting from a warm state. On the basis of the identical overloss (corresponding approximately to an identical overheating) the following equation may be written for the stator currents [4] :

$$(1,5^2 - 1) 120 [\text{sec}] = \left( \frac{I^2}{I_n^2} - 1 \right) t [\text{sec}]$$

from which

$$t [\text{sec}] = \frac{150 [\text{sec}]}{\frac{I^2}{I_n^2} - 1}.$$

On the basis of the formula above we obtain for some of the overcurrent values the times included in Table 1.

The short-circuit ratio of turbogenerators is between 0,5—0,8, the field current at rated load is 3...2-times of that at no-load, so the steady-state current of a three-phase terminal short-circuit is  $0,5 \cdot 3I_n = 1,5I_n$ , resp.  $0,8 \cdot 2I_n = 1,6I_n$ . If the ratio of overexcitation is 1,8-times, a steady-state three-phase short-circuit current of  $1,8 \cdot 1,6I_n = 2,88I_n$  (if 2,5-times, then  $2,5 \cdot 1,6I_n = 4I_n$ ) is produced.

So according to Table 1, resp. to the above formula, neglecting the subtransient, transient, as well as the d. c. short-circuit current components, but at the same time calculating with the maximum steady-state short-circuit current, the duration of the quick-response overexcitation may be about



Table 1

Time of overload in function of the overcurrent

$I/I_n$	1,5	2	2,5	3	4
$t$ [sec]	120	50	28,5	18,7	10

20 sec (resp. 10 sec). In view of the fact, that the value of the two-phase steady-state short-circuit current is about 1,6-times that of the three-phase one, considering a two-phase short circuit, from the point of view of the stator a duration of 8 sec (resp. 4 sec) would be permissible for the overexcitation.

The above calculations are informative. For a given machine with full knowledge of the permissible overheatings, maximum duration of the quick-response overexcitation can and must be determined exactly.

## 2. Experimental determination of the factors figuring in the quick-response overexcitation

Before realizing the quick-response overexcitation at a certain synchronous generator unit, the ceiling voltage of the exciter, the maximum field current of the synchronous generator must be predetermined as well as how quickly the values mentioned are established after the start of quick-response overexcitation. It is the most advisable to clear the above questions experimentally.

Measurement may be effected as follows [4]: All the three terminals of the de-energized generator must be short-circuited, afterwards excitation must be increased until an approx. rated current appears in the stator circuit. Short-circuiting all resistances in the field circuit of the exciter (Fig. 1), development of stator current, rotor current and rotor voltage is recorded by oscillograph (Figs. 4 and 5).

In the meantime we would like to mention that at the set-up test of the quick-response overexciting equipment a similar measurement may be effected and at this time also the self-time of the quick-exciting equipment (the time elapsing from the breakdown of the stator voltage up to the closing of the contacts of the quick-response overexciting contactor) can be determined.

It is advisable to control by calculation the development of the quantities tested, too.

### 2.1. Simplified calculating method for determination of the quantities figuring in the quick-response overexcitation

Some remarks are made concerning the course of the oscillograms. The physical explanation of the occurring processes is complicated by the

presence of magnetic saturation, remanence and eddy currents. In first approximation we neglect their effect. If we also neglect the small stator resistance of the generator, the phenomena taking place in the "direct axis" of the machine are independent of those occurring in the "quadrature axis" [5]. With the presumed neglects, the equivalent circuit for the direct axis

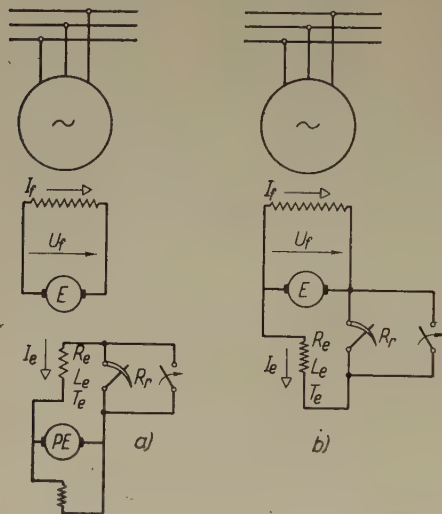


Fig. 1. Schematic circuit diagram of the quick-response overexcitation. a) Exciter with separate excitation; b) exciter with shunt excitation

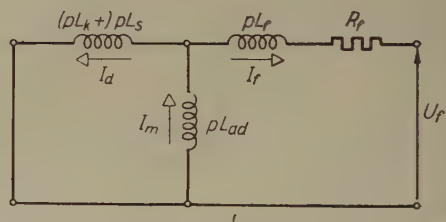


Fig. 2. Direct-axis circuit diagram of the generator with short-circuited stator

of the machine, with short-circuited stator, may be seen on Fig. 2; the mutual inductance between the rotor and stator circuits is  $L_{ad}$ , the leakage inductance of the stator coil is  $L_s$ , that of the field coil is  $L_f$ , its resistance is  $R_f$ , latter quantities are, similarly to the transformers, related to the stator.  $I_d$  is the direct-axis component of the stator current (being absolutely reactive by neglecting the stator resistance),\*  $I_f$  is the current in the field circuit of the

\* The current  $I_d$  determines only the envelope-curve of the stator current. The phase-currents themselves are [7]:

$$\begin{aligned}
 I_a &= I_d \cos (\omega_0 t + \Theta_0) - I_q \sin (\omega_0 t + \Theta_0) = I_d \cos (\omega_0 t + \Theta_0) \\
 I_b &= I_d \cos \left( \omega_0 t + \Theta_0 - \frac{2\pi}{3} \right) - I_q \sin \left( \omega_0 t + \Theta_0 - \frac{2\pi}{3} \right) = \\
 &= I_d \cos \left( \omega_0 t + \Theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\
 I_c &= I_d \cos \left( \omega_0 t + \Theta_0 + \frac{2\pi}{3} \right) - I_q \sin \left( \omega_0 t + \Theta_0 + \frac{2\pi}{3} \right) \\
 &= I_d \cos \left( \omega_0 t + \Theta_0 + \frac{2\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

Here in the right-side figures, the relation  $I_q = 0$  was already taken into consideration.

generator,  $U_f$  is the field voltage, latter two quantities are also related to the stator.

The change in the field current occurring under the effect of the change in the field voltage  $\Delta U_f$ :

$$I_f = \frac{\Delta U_f}{R_f + pL_f + \frac{pL_{ad}pL_s}{pL_{ad} + pL_s}} \quad (1)$$

Let us introduce the following time constants:

$$T'_{do} = \frac{1}{R_f} (L_f + L_{ad}) \quad (2)$$

the transient no-load time constant, and

$$T'_d = \frac{1}{R_f} \left( L_f + \frac{L_{ad}L_s}{L_{ad} + L_s} \right) \quad (3)$$

the transient short-circuit time constant. Evidently,

$$\frac{T'_d}{T'_{do}} = \frac{\frac{L_{ad}L_s + L_{ad}L_f + L_sL_f}{L_{ad} + L_s}}{L_{ad} + L_f} = \frac{\frac{L_{ad}L_s + L_{ad}L_f + L_sL_f}{L_{ad} + L_f}}{L_{ad} + L_s} = \frac{X'_d}{X_d}, \quad (4)$$

where

$$X_d = \omega_0 (L_{ad} + L_s) \quad (5)$$

is the synchronous reactance and

$$X'_d = \omega_0 \left( L_s + \frac{L_{ad}L_f}{L_{ad} + L_f} \right) \quad (6)$$

the transient reactance.

Considering these, we get from (1):

$$\Delta I_f = \frac{1}{pT'_d + 1} \cdot \frac{\Delta U_f}{R_f} \quad (7)$$

The change in the direct-axis component of the stator current according to Fig. 2:

$$\Delta I_d = - \frac{L_{ad}}{L_{ad} + L_s} \Delta I_f \quad (8)$$

On the basis of (7) and (8)

$$\Delta I_d = \frac{1}{pT'_d + 1} \cdot \frac{X_{ad}}{X_d} \cdot \frac{\Delta U_f}{R_f}, \quad (9)$$

where  $X_{ad} = \omega_0 L_{ad}$ .

Supposing the terminal voltage of the pilot exciter to be constant, the quick-response overexcitation, i. e. short-circuiting the exciter field rheostat (in Fig. 1a  $R_f$ ) has an effect as if we connected to the field coil of the main exciter a voltage equal to the voltage  $\Delta U_{e0}$ , which existed between the terminals of the rheostat before the short circuit. Consequently, a change of current takes place:

$$\Delta I_e = \frac{\Delta U_{e0}}{R_e + pL_e} = \frac{1}{pT_e + 1} \cdot \frac{\Delta U_{e0}}{R_e}, \quad (10)$$

where  $L_e$  is the full inductivity of the field-circuit of the main exciter,  $R_e$  is its resistance and  $T_e = L_e/R_e$  is the time constant of the excitation system. The change of internal voltage\* (with an approximation: of its terminal voltage) may be expressed as follows:

$$\Delta U_f = k \Delta I_e = \frac{\Delta U_{f\infty}}{pT_e + 1}, \quad (11)$$

where  $\Delta U_{f\infty}$  is the change of voltage occurring in the main exciter effected by the steady-state current change in the field circuit:  $\Delta U_{f\infty} = k \Delta U_{e0}/R_e$ . The change in the field current of the generator on the basis of (7) and (11) is

$$\Delta I_f = \frac{1}{pT_e + 1} \cdot \frac{1}{pT'_d + 1} \cdot \frac{\Delta U_{f\infty}}{R_f}, \quad (12)$$

while the change in the envelope-curve of the stator current from expressions (9) and (11) is:

$$\Delta I_d = \frac{1}{pT_e + 1} \cdot \frac{1}{pT'_d + 1} \cdot \frac{X_{ad}}{X_d} \cdot \frac{\Delta U_{f\infty}}{R_f}. \quad (13)$$

The time functions with the expansion theorem [5] are: the change in the field voltage from relation (11):

$$\Delta U_f = (1 - e^{-t/T_e}) \Delta U_{f\infty}, \quad (14)$$

\* Internal voltage is equal in magnitude to the e. m. f., but opposite in sign.



the change in the field current from expression (12) :

$$\Delta I_f = F(t) \frac{\Delta U_{f\infty}}{R_f} = F(t) \Delta I_{f\infty}, \quad (15)$$

the change in the envelope-curve of the stator current from relation (13) :

$$\Delta I_d = -F(t) \frac{X_{ad}}{X_d} \frac{\Delta U_{f\infty}}{R_f} = \frac{X_{ad}}{X_d} \Delta I_f, \quad (16)$$

where

$$F(t) = 1 - \frac{T'_d e^{-t/T'_d} - T_e e^{-t/T_e}}{T'_d - T_e}. \quad (17)$$

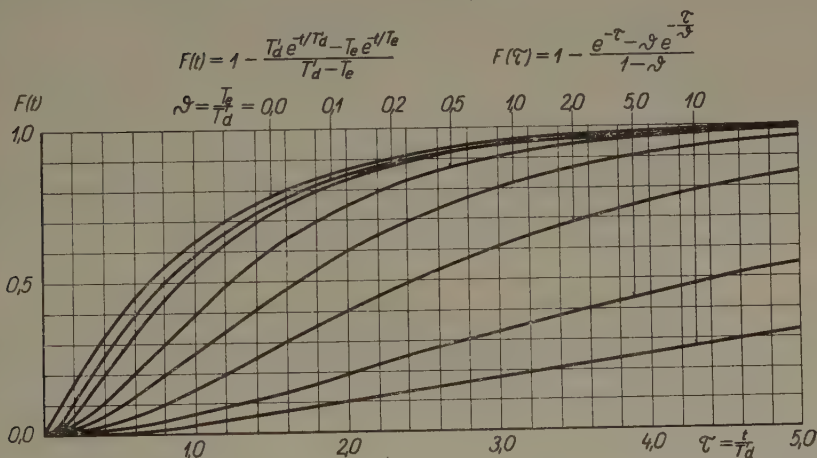


Fig. 3. The function  $F(\tau) = F(t/T'_d)$  in case of different parameters  $\vartheta = T_e/T'_d$

Consequently, the field voltage alters according to one, the rotor and stator current according to two time constants.

On Fig. 3 the function  $F(t)$  determining the process of current changes is shown for different time-constant ratios of  $\vartheta = T_e/T'_d$ . It is noted that by introducing the relative time  $\tau = t/T'_d$ , the function  $F(t)$  may be expressed in the following general form :

$$F(\tau) = 1 - \frac{e^{-\tau} - \vartheta e^{-\tau/\vartheta}}{1 - \vartheta}. \quad (18)$$

As can also be seen from Fig. 3, the time constant  $T_e$  of the field circuit of the exciter has primarily an effect on the initial section of the curve  $F(t)$ . On the basis of the set of curves it can be stated that if the time constant  $T_e$  is a fracture of  $T'_d$  ( $\vartheta = 1/3 \dots 1/5$ ), an important gain cannot be realized

by reducing the time constant  $T_e$ . Consequently, the efficiency of the quick-response overexcitation is only slightly influenced by the time constant  $T_e$  of the excitation system. This is even more supported by the fact that in case of asymmetrical, or distant symmetrical short circuits, the value of time constant  $T'_d$  becomes greater :

$$T'_d = \frac{X'_d + X_k}{X_d + X_k} T'_{d0} \text{ instead of } T'_d = \frac{X'_d}{X_d} T'_{d0},$$

where  $X_k$  is the reactance being characteristic of the asymmetrical, or the distant symmetrical short circuit.

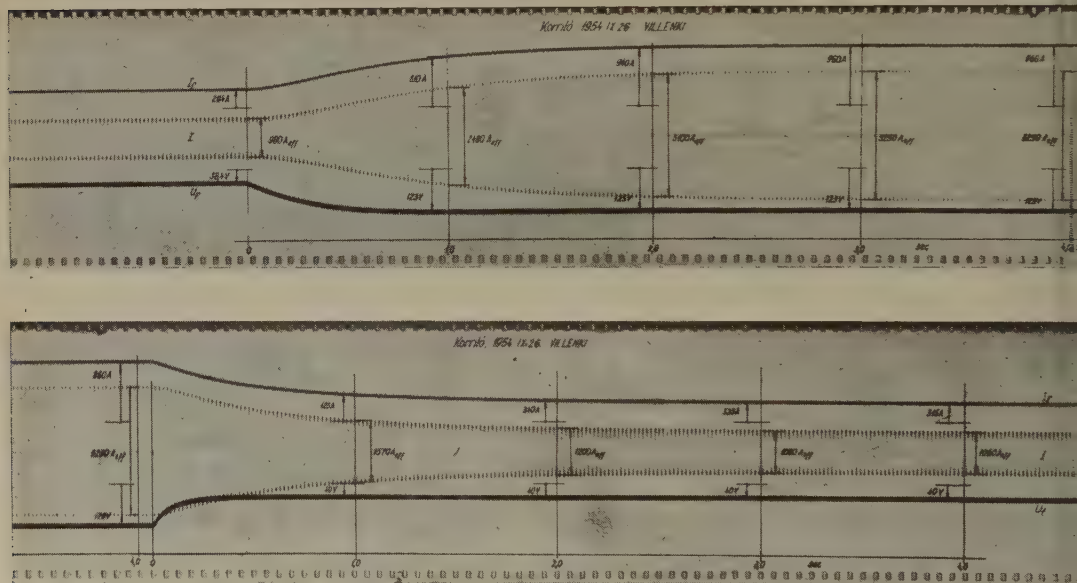


Fig. 4. Change of the field voltage, stator current and field current of a generator with short-circuited stator during quick-response overexcitation

## 2.2. Comparison of the results of calculations and measurements

Checking of the formula deduced was made by the oscillograms of Figs. 4 and 5, on which the stator current, field current and field voltage can be seen [6].

Fig. 4a shows the overexciting, Fig. 4b the de-exciting process, Fig. 5 the overexciting and de-exciting process for some cases. Table 2 informs about the values measured at different times on the basis of the oscillograms.

Records refer to a two-pole, Ganz OF 760 × 1900/2 type, 10 MVA rated output, 5750 V rated voltage, 1000 A rated current (power factor 0,7), star-connected turbogenerator. For information data of the main exciter are : type EGS 390/220, 120 V, 650 A, 3000 r. p. m., 6 poles ; data of the

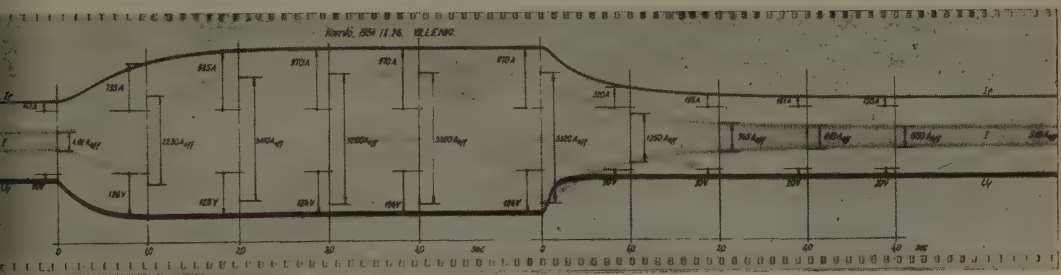


Fig. 5. Change in the field voltage, stator current and field current of the generator with short-circuited stator during quick-response overexcitation

pilot exciter are as follows : EG 180/60, 120 V, 12 A, 3000 r. p. m., 4 poles. On the no-load characteristic of the generator a field current  $I_f = 168$  A belongs to the  $U_n = 5750$  rated phase-to-phase voltage of the stator. On the short-circuit characteristic of the generator a field current of about  $I_f = 294$  A belongs to the  $I_n = 1000$  A rated stator current.

Calculations were made using the expressions (14), (15), (16) and (17). Though equations (14) and (15) refer strictly to the quantities related to

Table 2  
Summary of the quick-response overexcitation measurements

	t sec	Fig. 4.			Fig. 5.		
		$I_f$ A	$I$ A	$U_f$ V	$I_f$ A	$I$ A	$U_f$ V
Overexcitation	0	294	980	38,4	147	491	20
	1	810	2480	123	735	2230	126
	2	940	3100	123	935	3110	125
	3	960	3250	123	970	3290	124
	4	960	3250	123	970	3320	124
De-excitation	0	960	3250	123	970	3320	124
	1	425	1570	40	320	1250	20
	2	340	1200	40	195	745	20
	3	325	1080	40	161	610	20
	4	315	1060	40	150	550	20

the stator, they can also be used for determining the real change in the field voltage and field current.

Tests showed that the ceiling voltage of the main exciter was 123...124 V. So in the first case  $\Delta U_{f\infty} = 123 \text{ V} - 38,4 \text{ V} = 84,6 \text{ V}$ , and in the second one  $\Delta U_{f\infty} = 124 \text{ V} - 20 \text{ V} = 104 \text{ V}$ .

The resistance of the field coil is  $0,112 \Omega$  at a temperature of  $31^\circ \text{C}$ . If temperature of the rotor is assumed to be about  $65^\circ \text{C}$  during the tests, the resistance of the field coil is about  $0,127...0,125 \Omega$ . Consequently, the steady-state change in the field current effected by the steady-state change in the field voltage is  $\Delta I_{f\infty} = \Delta U_{f\infty} : R_f = 84,6 \text{ V} : 0,127 \Omega = 666 \text{ A}$ , and  $\Delta I_{f\infty} = \Delta U_{f\infty} : R_f = 104 \text{ V} : 0,125 \Omega = 832 \text{ A}$ , resp.

As in the case of a short-circuited generator a stator current of 1000 A belongs to a field current of 294 A, in the first case a change in stator current of  $\Delta I_{d\infty} = 2270 \text{ A}$  belongs to a change of field current of  $\Delta I_{f\infty} = 666$ , and in the second case a change in stator current of  $\Delta I_{d\infty} = 2830 \text{ A}$  corresponds to a change in the field current  $\Delta I_{f\infty} = 832 \text{ A}$ .

With the above data, using  $T_e = 0,25 \text{ sec}$  and  $T'_d = 0,5 \text{ sec}$ , on the basis of the formulas (14), (15), (16), and (17) we computed the value of  $\Delta U_f$ ,  $\Delta I_f$  and  $\Delta I_d$  in function of time. To compare the calculations and measurements Figs. 6 and 7 were drawn for the first, and the second case, resp. On both figures the dashed lines show the results of calculations, while the continuous curves were drawn on the basis of the oscillogram records of Figs. 4 and 5. Coincidence may be regarded to be good in spite of the neglections made during the calculation. So the simplified calculating method discussed above may be well used for the preliminary estimation of the quantities, important from the point of view of quick-response overexcitation.

### 2.3. Remarks regarding the process of the quantities tested

On the basis of the discussed calculations, some comments may be made in connection with the process of the quantities recorded by oscillograph. It can be observed that the voltage  $U_f$  reaches its steady-state value in case of overexcitation in a longer time than at de-excitation. This is due to the fact that in case of overexcitation the value of the time constant  $T_e$  is

$$T_e = \frac{L_e}{R_e},$$

but in case of de-excitation it is smaller :

$$T'_e = \frac{L_e}{R_e + R_r}.$$



In case of de-excitation, according to the time constant  $T'_e$  the current  $\Delta I_f$  — and also the envelope-curve of the stator current  $\Delta I_d$  — is nearer to a purely exponential curve, depending only on one time constant  $T'_d$ .

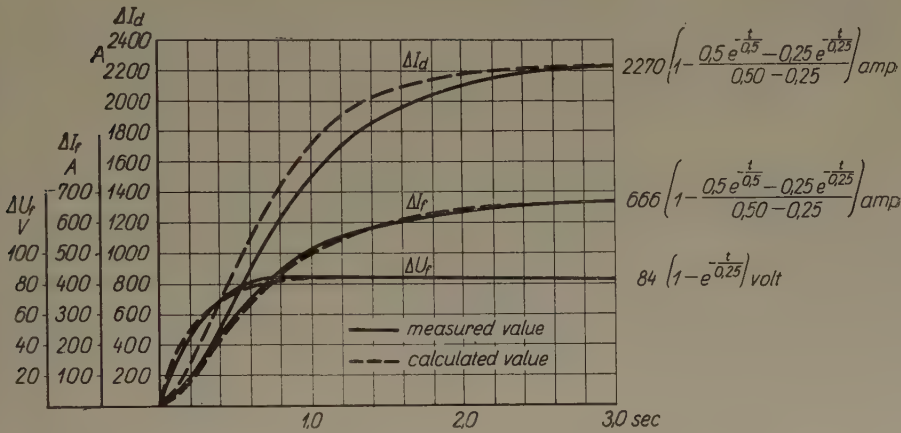


Fig. 6. Comparison of the results of calculations and measurements

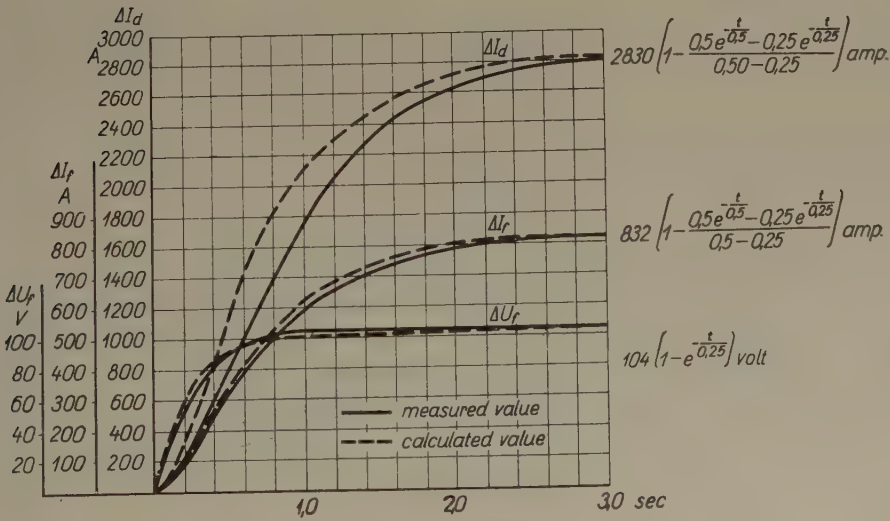


Fig. 7. Comparison of the results of calculations and measurements

It can be also observed that during de-excitation all quantities recorded tend to a somewhat greater value than the initial one. This is due to the residual magnetism.

### 3. The electrical processes of the generator if its circuit breaker works during quick-response overexcitation

We have also to answer the question, whether it is not dangerous from the point of view of the generator if its circuit breaker works in an over-excited state.

#### 3.1. If quick-response overexcitation is maintained

Investigation is only carried out for simplified cases. Let us assume that the generator was short-circuited merely through an external  $X_k$  reactance (so that resistances of the stator circuit are neglected, consequently, the equivalent circuit of the direct axis can be further on used for our calculations (Fig. 2) — if the neglects made in paragraph 2.1. are henceforward accepted) and so only the operational inductance  $pL_k$ , according to the external reactance  $X_k$ , must be connected in series with the operational inductance  $pL_s$ . In addition, let us suppose the quick-response overexciting equipment had worked, and the steady-state condition took place, consequently, in the field circuit a  $\Delta I_{f\infty}$  current flows.

Now the steady-state direct-axis component of the stator current's envelope-curve is

$$I_{d\infty} = - \frac{L_{ad}}{L_k + L_s + L_{ad}} I_{f\infty}, \quad (19)$$

the current of the quadrature-axis is zero :

$$I_q = 0. \quad (20)$$

Now assuming, for example, that under the effect of the protective devices the circuit breaker of the generator operates, but the automatic de-energizing equipment does not and the quick-response overexcitation also maintains itself: constantly  $U_{f\infty} = \text{const.}$  Breaking the stator current is equivalent with the operation of a current generator in the short-circuiting branch, giving a current of  $-I_{d\infty}$ . On the basis of the superposition theorem, current will be zero in the stator circuit :

$$I_d = I_{d\infty} - I_{d\infty} = 0 \quad (21)$$

while (considering Fig. 2), in the magnetizing branch a current of

$$I_{md} = - \frac{R_f + pL_f}{R_f + p(L_{ad} + L_f)} I_{d\infty} \quad (22)$$

flows, as the branch of the exciting circuit must be short-circuited ( $U_{f\infty} = 0$ ), when calculating the superpositional current. Taking into consideration (19):

$$I_{md} = \frac{L_{ad}}{L_k + L_s + L_{ad}} \frac{R_f + pL_f}{R_f + p(L_{ad} + L_f)} I_{f\infty} \quad (23)$$

and, using the expansion theorem [5], from expression (23) the time function is:

$$I_{md} = \frac{L_{ad}}{L_k + L_s + L_{ad}} \left( 1 - \frac{L_{ad}}{L_{ad} + L_f} e^{-t/T'_{do}} \right) I_{f\infty}. \quad (24)$$

To the superpositional current  $I_{md}$  must be added the initial current

$$I_{mo} = I_{d\infty} + I_{f\infty} \quad (25)$$

originally established in the magnetizing branch. Considering (19),

$$I_{mo} = \frac{L_k + L_s}{L_k + L_s + L_{ad}} I_{f\infty} \quad (26)$$

while the total current appearing in the magnetizing branch, from relations (24) and (26):

$$I_m = I_{mo} + I_{md} = \left( 1 - \frac{L_{ad}}{L_k + L_s + L_{ad}} \frac{L_{ad}}{L_{ad} + L_f} e^{-t/T'_{do}} \right) I_{f\infty}. \quad (27)$$

Considering expressions (5) and (6), after some algebraic transformation:

$$I_m = \left( 1 - \frac{X_d - X'_d}{X_d + X_k} e^{-t/T'_{do}} \right) I_{f\infty} \quad (28)$$

The direct-axis component of the resulting flux linkage of the stator (according to Fig. 2):

$$\psi_d = (L_s + L_{ad}) I_d + L_{ad} I_f = L_s I_d + L_{ad} I_m, \quad (29)$$

and now the quadrature-axis component  $\psi_q$  is zero:

$$\psi_q = L_{aq} I_q = 0 \quad (30)$$

as  $I_q = 0$ . Considering expressions (21) and (28), from (29) we get

$$\psi_d = \left( 1 - \frac{X_d - X'_d}{X_d + X_k} e^{-t/T'_{do}} \right) L_{ad} I_{f\infty}. \quad (31)$$

The fundamental equations of the synchronous machine are [7] :

$$\begin{aligned} U_d &= p \psi_d - \omega_0 \psi_q + R I_d \\ U_q &= \omega_0 \psi_d + p \psi_q + R I_q. \end{aligned} \quad (32)$$

Considering expressions (20), (21), (30) :

$$\begin{aligned} U_d &= p \psi_d \\ U_q &= \omega_0 \psi_d. \end{aligned} \quad (33)$$

Differentiating the expression (31) of the flux-linkage  $\psi_d$ , respectively, multiplying it by  $\omega_0$ , we may be convinced that (even at the initial time) the voltage-component  $U_d$  is by an order of magnitude smaller, than the voltage component  $U_q$ , therefore it is neglected. Introducing on the basis of expression

$$\omega_0 L_{ad} I_{f\infty} = U_{0\infty}, \quad (34)$$

the maximum voltage  $U_{0\infty}$  obtainable by quick-response over excitation on the generator at no-load, on the basis of expressions (31), (33) and (34) finally we get\*

$$U_q = \left( 1 - \frac{X_d - X'_d}{X_d + X_k} e^{-t/T_{d0}} \right) U_{0\infty}. \quad (35)$$

In the steady-state condition

$$U_{q(t=\infty)} = U_{0\infty}, \quad (36)$$

at the initial time

$$U_{q(t=0)} = \frac{X'_d + X_k}{X_d + X_k} U_{0\infty} = U'. \quad (37)$$

(It is to be noted that having also considered the effect of the damping coil, or that of the solid iron, we would have got another expression instead of (35) — and instead of (37) the following relation would be valid :

$$U_{q(t=0)} = \frac{X''_d + X_k}{X_d + X_k} U_{0\infty} = U''). \quad (38)$$

For comparison, let us compute also the terminal voltage having been established before the interruption of the short-circuit current. Let us substitute

\*  $U_q$  gives only the envelope-curve of the stator voltage, the stator voltage itself is :  $U_a = -U_q \sin(\omega_0 t + \Theta_0)$ , etc.



into expression (29) of the flux linkage  $\psi_d$  the expressions (19) of  $I_d = I_{d\infty}$  and  $I_f = I_{f\infty}$ :

$$\psi_d = \left(1 - \frac{L_s + L_{ad}}{L_k + L_s + L_{ad}}\right) L_{ad} I_{f\infty}. \quad (39)$$

Considering expressions (33), (34) and (39), finally:

$$U_{q0} = \frac{X_k}{X_d + X_k} U_{0\infty}. \quad (40)$$

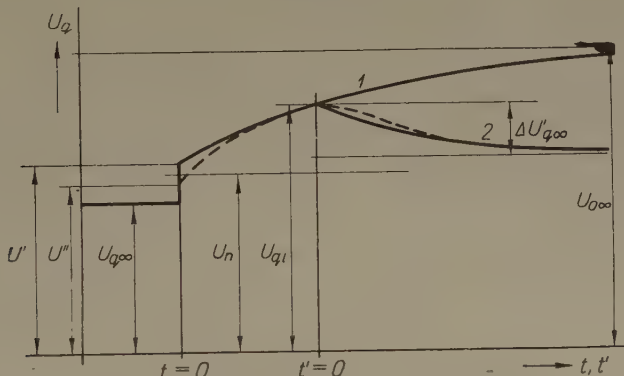


Fig. 8. Change of the envelope-curve of the stator voltage in case of operation of the circuit breaker during short circuit and quick-response overexcitation

Curve 1. Quick-response overexcitation maintains itself unchanged; Curve 2. Quick-response overexciting equipment works and stops quick-response overexcitation

On the basis of the above it may be stated that in maintenance of the quick-response overexcitation, the terminal voltage grows at the initial time after the interruption of the short circuit from the value  $U_{q0}$  given by (40) to a value  $U''$  given by expression (38), being the so-called voltage behind the subtransient reactance, and after some cycles it corresponds to a voltage  $U'$  given by (37), being the so-called voltage behind the transient reactance. Later the voltage grows according to the transient no-load time constant  $T'_{do}$  and finally reaches the maximum voltage  $U_{0\infty}$  (see Fig. 8).

In the foregoing we only gave a qualitative picture of the processes, having neglected the saturation. As by quick-response overexcitation an about 4...5-times greater field-current, than that at no-load can be obtained, without saturation the no-load voltage would also grow in the same proportion. But on the basis of the no-load characteristic of the generators it may be stated that on account of the saturation the terminal voltage would reach only 1.5...1.6-times of the rated stator voltage (Fig. 8 was drawn in this consideration). As this value may be dangerous from the point of view of

insulation, it must be assured in all cases that at the work of the circuit breaker the process of quick-response overexcitation should stop. Fortunately, there is a time for intervention, as in the first cycles the voltage  $U'$  behind the transient reactance is competent (which, even in the worst case is not much greater than the rated voltage), while the terminal voltage would reach the too high  $U_{0\infty}$  voltage after a longer time (after some seconds).

### 3.2. *If the quick-response overexciting equipment operates automatically*

In the following the processes will be examined occurring in case of operation of the quick-response overexciting equipment too, when the circuit breaker interrupts the short-circuit current. According to the operating value and the holding ratio of the equipment, when reaching a certain voltage, the contacts of the voltage-dip relay separate and break the circuit of the quick-response overexciting contactor. According to the release time of the contactor, the  $R'_r$  field rheostat is again inserted after a certain delay (Fig. 1a), where  $R'_r \neq R_r$ , as during the quick-response overexcitation the value of the rheostat could have changed (e. g. because the automatic voltage regulator sets another value). Let us assume the terminal voltage of the generator to be  $U_{qi}$  at this initial time. The flux linkage is then  $\psi_{di} = U_{qi}/\omega_0$ , while the magnetizing current

$$I_{mi} = \frac{\psi_{di}}{L_{ad}} = \frac{U_{qi}}{X_{ad}}. \quad (41)$$

Insertion of  $R'_r$  has such an effect as if we connected a  $\Delta U'_{e0}$  voltage — equal in magnitude to the voltage arising at the terminals of the field rheostat just after the insertion — to the field coil of the main exciter. Consequently, a change of current of

$$\Delta I'_e = - \frac{\Delta U'_{e0}}{R'_e + pL_e} = - \frac{1}{pT'_e + 1} \frac{\Delta U'_{e0}}{R'_e} \quad (42)$$

takes place, where  $R'_e = R_e + R'_r$  and  $T'_e = L_e/R'_e$ .

The change in voltage of the main exciter is

$$\Delta U'_f = k \Delta I'_e = - \frac{\Delta U'_{f\infty}}{pT'_e + 1}, \quad (43)$$

where  $\Delta U'_{f\infty} = k \Delta U'_{e0}/R_e$ .

Change of the field current is :

$$\Delta I'_f = \frac{\Delta U'_f}{R_f + p(L_{ad} + L_f)} \quad (44)$$

and considering (43) :

$$\Delta I'_f = - \frac{1}{pT'_e + 1} \frac{1}{pT'_{do} + 1} \frac{\Delta U'_{f\infty}}{R_f}. \quad (45)$$

The time function by aid of the expansion theorem [5] :

$$\Delta I'_f = -F'(t') \frac{\Delta U'_{f\infty}}{R_f} = F'(t') \Delta I'_{f\infty}, \quad (46)$$

where

$$F'(t') = 1 - \frac{T'_{do} e^{-t'/T'_{do}} - T'_e e^{-t'/T'_e}}{T'_{do} - T'_e}. \quad (47)$$

The full magnetizing current with addition of expressions (41) and (46) :

$$I_m = I_{mi} + \Delta I'_f = I_{mi} - F'(t') \Delta I'_{f\infty} \quad (48)$$

while the quadrature-axis stator voltage :

$$U_q = \omega_0 L_{ad} I_m = U_{qi} - F'(t') \Delta U'_{q\infty} \quad (49)$$

where  $\Delta U'_{q\infty} = \omega_0 L_{ad} I'_{f\infty}$ .

In the steady-state, on the basis of (49) and (47) :

$$U_{q(t'=\infty)} = U_{qi} - \Delta U'_{q\infty}. \quad (50)$$

From the foregoing it may be stated that the quick-response over-exciting equipment, stopping the process of overexcitation, reduces the terminal voltage of the generator from the maximum  $U_{qi}$  value (where  $U' < U_{qi} \leq U_{0\infty}$ , though  $U_{qi}$  is perhaps somewhat greater, than the rated voltage of the generator) to a non-dangerous value determined by (50) (Fig. 8). It must be noted that the time constant  $T'_{do}$  is by an order of magnitude greater, than the time constant  $T'_e$ , therefore the process of stator voltage with a good approximation instead of (49) may be expressed by

$$U_q = U_{qi} - (1 - e^{-t'/T'_{do}}) \Delta U'_{q\infty}. \quad (51)$$

### 3.3. If the automatic de-energizing equipment is in operation

Finally, we would mention that during the quick-response overexcitation the automatic de-energizing equipment can work, too. Assuming the field

current to be  $I_{f\infty}$  and the de-exciting resistance  $R_l$  to be parallelly inserted into the exciting circuit of the generator, while the exciter providing the exciting voltage is disconnected. As the exciting circuit of the generator has an inductivity, in the first instant the field current remains unchanged and produces a voltage  $I_{f\infty}R_l$  on the resistance  $R_l$ . It must be controlled, if this voltage is not dangerous from the point of view of the rotor-insulation of the generator.

Naturally, after the operation of the automatic de-exciting equipment the field current decreases to zero, therefore the terminal voltage of the no-loaded generator, as well as the stator current of the short-circuited generator, decreases to zero.

#### 4. Conclusions

On the basis of the aforesaid, as to the development of the quick-response overexciting equipment, the following conclusions may be drawn.

1. Under normal conditions quick-response overexcitation establishes no dangerous thermal loads from the point of view of the rotor nor that of the stator of the generator. Nevertheless, it is advisable to limit the maximum duration of quick-response overexcitation, to avoid exaggerated heating even in extraordinary cases (continuous breakdown, fault of protection).

2. The effect of quick-response overexcitation prevails completely only after a certain delay and after the termination of a certain process. Therefore, in case of a sudden short-circuit, quick-response overexcitation does not at all influence the initial subtransient current governing the dynamical forces, and scarcely the transient current; it only increases the steady-state short-circuit current.

3. If the quick-response overexcitation is maintained, even after the operation of the circuit-breaker of the generator, dangerous overvoltages may rise in the generator. Therefore, when the circuit-breaker works, care must be taken to stop quick-response overexcitation. If at these times quick-response overexciting equipment stops the overexcitation, the increase in voltage will not become dangerous.

4. The de-energizing resistance must be checked from the view-point, if an exaggerate voltage did not rise in the field circuit of the generator, when during quick-response overexcitation the automatic de-energizing equipment had worked.



## Summary

The article examines the conditions prescribed for the quick-response overexcitation, assuring, that the synchronous generator is in no case exposed to an exaggerate stress on account of quick-response overexcitation. The questions of overheating, the electrical processes of the generator due to quick-response overexcitation: the process of currents and voltages, are discussed in details.

## Literature

1. CSÁKI, F.: The quick-response overexciting equipment of the Institute of Electrical Power Research (VILLENKI). Directions for projection, setup, handling and maintenance. VILLENKI Publications, Budapest, 1955. Nr. 84. (In Hungarian.)
2. CSÁKI, F.: Working tests on the VILLENKI quick-response overexciting equipment. VILLENKI Publications, Budapest, 1957. Nr. 161. (In Hungarian.)
3. CSÁKI, F.: Quick-response overexcitation of synchronous generators. Elektrotechnika, Budapest, Vol. 50., 1957. p. 167. (In Hungarian.)
4. SIROMIATNIKOV, I. A.: Operation of synchronous generators. Gosenergoizdat, 1952. (In Russian.)
5. KOVÁCS, K. P.—RÁCZ, I.: Transient processes of a. c. machines. Akadémiai Kiadó, 1954. (In Hungarian.)
6. CSÁKI, F.: Quick-response overexcitation of synchronous generators. Measurements on generator II. of the Komló Power Station. VILLENKI Publications, Budapest, 1955. Nr. 71. (In Hungarian.)
7. CSÁKI, F.: Influence of Series Capacitors on the Operation of Synchronous Machines. Acta Technica, Budapest XII. 1—2., p. 49.

F. CSÁKI, Budapest XI. Budafoki út 4, Hungary.



# A FAST NEUTRON TIME-OF-FLIGHT SPECTROMETER

By

G. HREHUSS\*, A. NESZMÉLYI\* and K. SIMONYI

Institute for Theoretical Electricity of the Polytechnic University, Budapest

(Received March 8, 1958)

To solve many a problem of nuclear physics, it is necessary to measure the energy of neutrons producing nuclear reactions or arising in the process of it. Such problems are, among others, the energy dependence of cross-sections, especially that of the fission cross section, further the investigation of highly excited states of nuclei by means of inelastic scattering, and the measurement of energy spectra of neutron-sources. As is well-known from literature, different apparatuses have been developed for measuring neutron energy from thermal to 10 MeV [1—5]. Some of these require comparatively simple equipment as e. g. the precise emulsion-, [6—7], or telescope-technique [8] based on proton-recoil, on the other hand either their evaluation takes up much time or they possess low efficiency. Others, however, as the neutron diffractograph or the  $\text{He}^3$  recoil method can only be applied in a narrow energy band. The time-of-flight apparatuses which are becoming more and more current, undoubtedly possess the largest energy range; the high efficiency and a relatively good resolution counterbalances their expensiveness.

Short neutron bursts at low energy are usually produced by mechanical methods, in the fast region with electronical ones (by interrupting the charged particle beam which generates the neutrons). The energy can be determined by measuring the flight time over a given distance. The quadratic character of the time—energy function and consequently the necessity of a redoubled accuracy in measuring time are the apparent disadvantages of this system. On the other hand, with the lengthening of a flight-path, if intensity allows, the time-of-flight method is applicable even in the 100—200 MeV energy region [9].

We shall describe a fast neutron time-of-flight spectrometer for the energy range of 0.8—14 MeV. It was developed in the Department for Atomic Physics of the Central Research Institute of Physics (Budapest), for the investigation of the reaction-mechanism of highly excited nuclei (direct interaction) by means of inelastic scattering experiments. The general arrangement of

\* At the Central Research Institute of Physics, Department for Atomic Physics.

the apparatus is similar to that of CRANBERG and LEVIN [10], some details of which, however, may be of general interest.

For neutrons of energy  $E$  the flight-time over a distance  $L$  is :

$$t^{\text{m}\mu\text{s}} = \frac{72,3 L^{\text{m}}}{\sqrt{E^{\text{MeV}}}}$$

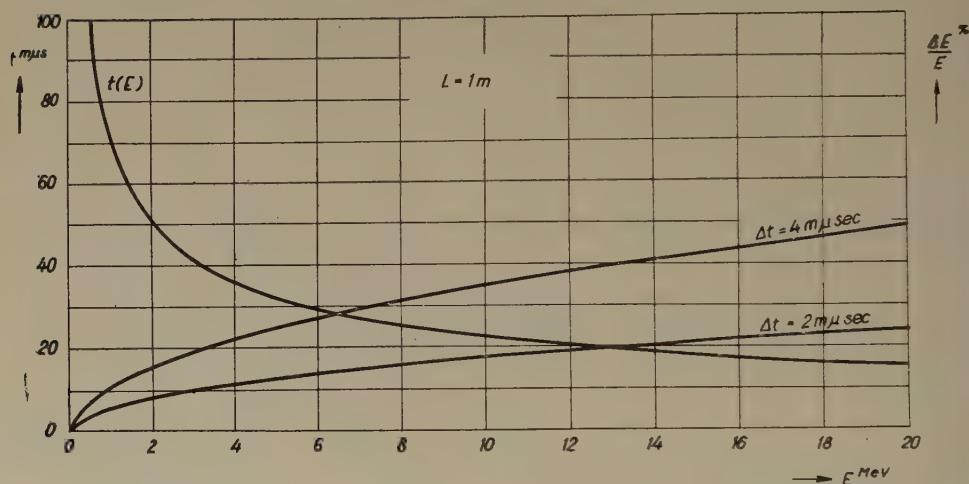


Fig. 1. Flight-time and relative energy spread as a function of neutron energy. The flight-path is 1 m

Fig. 1 shows the smallest relative errors which can be attained at different energies, if the error of the time measurement is 2 and 4  $\mu\text{sec}$  respectively. The reported values concern a flight path  $L = 1 \text{ m}$ . Neutrons are generated in short bursts and after having been scattered they flight the path 1,2—1,8 m, with a changed energy. At the end of this they enter a fast detector. Between the pulse given by the detector and the reference signal, appearing at another channel in the moment the deuteron bursts are produced, there is a time difference:  $t + \text{const}$ . The two signals get into the fast coincidence unit, which gives an output signal only if the reference pulse is properly delayed. The delay is equal to the flight-time, which is obviously determined only to the extent of an additive constant, but it can be precisely fixed with a suitable calibration (inelastic  $\gamma$  rays).

To be  $\Delta t = 1\text{--}3 \mu\text{sec}$  it is necessary that the neutrons in the bursts should start with no more than the same uncertainty. This was attained as follows: a Cockroft—Walton type generator of two hundred kilovolts with a radiofrequency-ion source [11] supplies a well-focused  $\text{D}^+$  ion-beam of about 0,1—1,0 mA intensity. The ion-beam vertically leaving the accelerator, enters a mass and energy analyzing magnetic field, which deflects the  $\text{D}^+$  component with  $90^\circ$  to the horizontal direction (Fig. 2). The  $\text{D}^{++}$  component



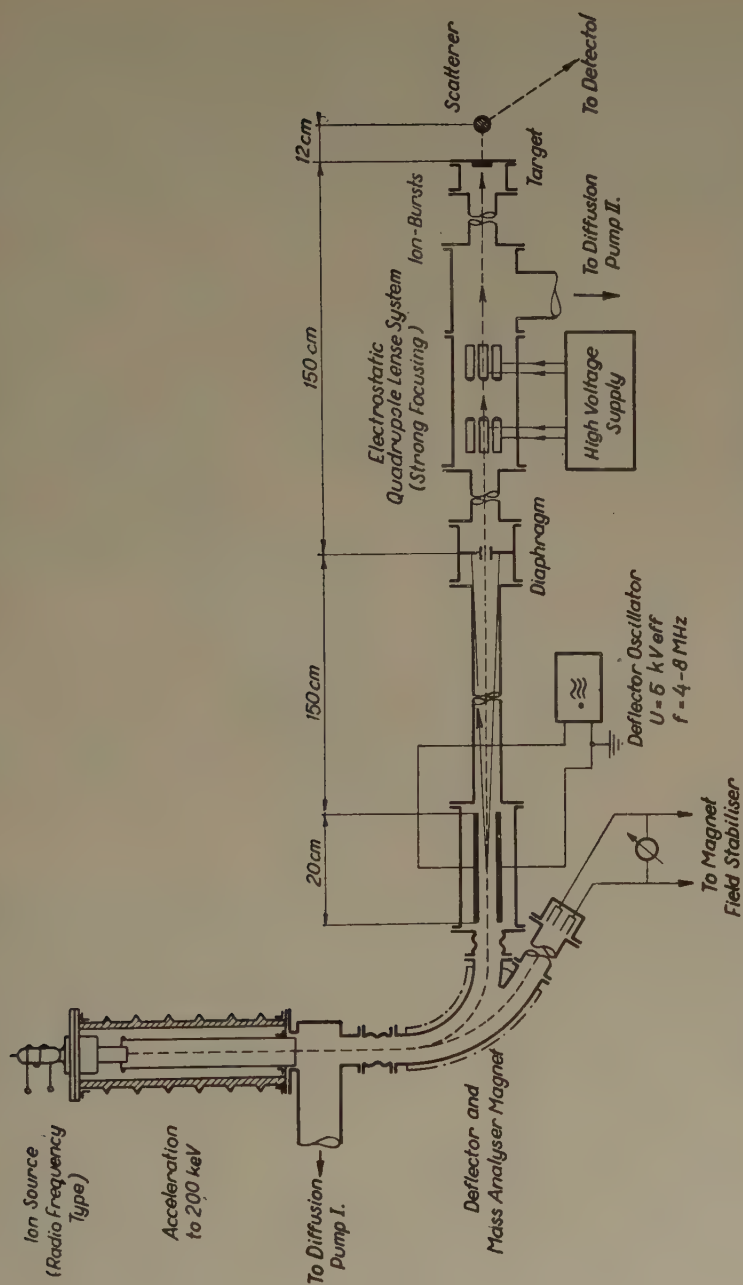


Fig. 2. Time of flight fast neutron spectrometer. General layout of the apparatus

may separately be used to stabilize the magnetic field and the accelerating voltage, respectively. The deflector magnet weights about 250 kg and at 6000 gaussses it requires 6 A at 300 V. The magnet is water-cooled.

The horizontal ion beam passes between two deflector plates, the applied r. f. voltage is max. 7 kV eff. at 4—8 MHz. The ion-beam deviates from the horizontal plane with a corresponding frequency. A diaphragm (with an

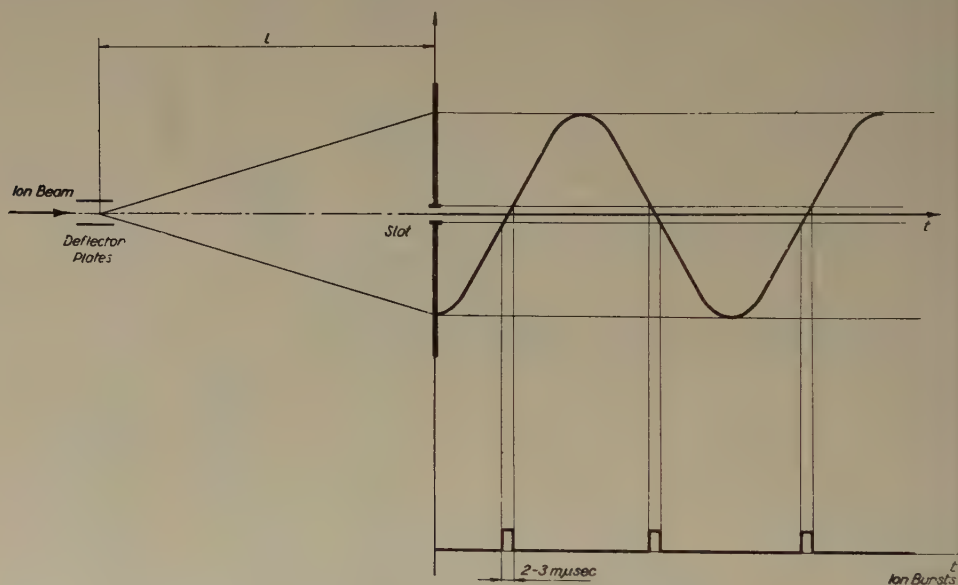


Fig. 3. Production of very short ion-bursts

opening of 1,5 cm, placed at a distance of 1,5 m) bars the continuing route of the ions coming to the diaphragm beyond the time interval:  $T/2 - \tau$ ,  $T/2 + \tau$ . (Fig. 3.) At a given geometrical arrangement and frequency, adequately short bombarding deuteron bursts can be obtained by a suitable voltage amplitude. The ions going through the diaphragm and passing through an electrostatic quadrupole lens system are focused on the target containing tritium or deuterium. This quadrupole lens system is of strong focusing and does not take part in the accelerating process. The lens requires two independent and regulated voltages in the range of 0—5 kV.

The vacuum system is about 7 m long (its volume being 100 l) and a pressure of  $0,8-2 \cdot 10^{-5}$  torr is maintained by two vacuum pumps located at different parts of the system and having a speed of 1750  $\mu\text{l}/\text{sec}$ . The external rate of gas enter of the whole system is negligible compared to the  $10 \text{ ncm}^3/\text{h}$   $\text{D}_2$  gas getting into the system through the ion-source. Along the ion-path three vacuum-meters are placed, one of the ionization-, and two of the Penning-type.

The intensity of the pulsed ion-beam bombarding the target is about  $1\ \mu\text{A}$  and the resulting neutron yield is  $10^6$ – $10^7$  neutrons/sec from the reactions  $\text{D/d}$ ,  $\text{n/He}^3$ ,  $\text{T/d}$ ,  $\text{n/He}^4$ , respectively. The secondary electron current is suppressed by a reverse electric field, resulting in a less than one-percent error for determining the ion-current. The tritium targets are imported from abroad, while the deuterium-targets are produced at the Department [12].

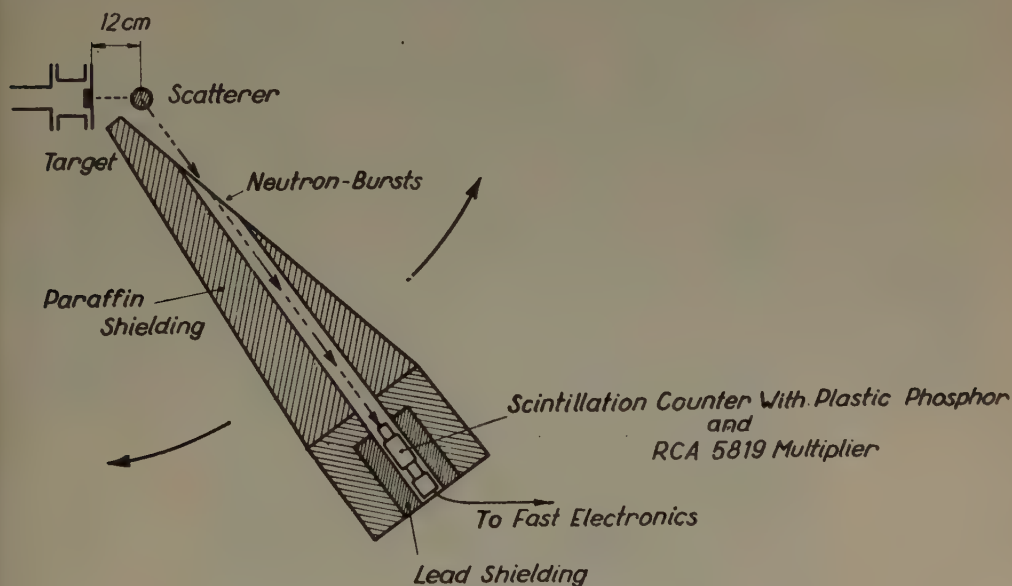


Fig. 4. Physical arrangement of detector, shield and target

The scattered neutrons enter the detector through a paraffin collimator (Fig. 4) which prevents the direct target-neutrons being counted. The neutron detector is a plastic scintillator (1.5" in diameter and 2" long, having a decay time constant of 2.5  $\mu\text{sec}$ ), which is covered, together with the RCA 5819 type multiplier, by a lead shield of 5 cm thickness. The detector and collimator can be rotated from  $0$ – $90^\circ$  around the scattering axis to ensure the possibility for the investigation of the angular dependence of scattering (See Fig. 5 and Fig. 6).

In the design of fast electronics it was necessary to insure maximum speed (Fig. 1 shows that at high energies the required frequency-band extends up to 2–300 MHz). A fast time-analyzer was developed consisting of the usual elements of the millimicrosecond technique. The time-measuring system is of the one-channel type. Instead of measuring the time intervals directly, we detect coincidences between the reference-pips and the neutron signals, the former being delayed in a known and variable manner. The block diagram of the electronic arrangement is shown in Fig. 7. The neutron signal at the

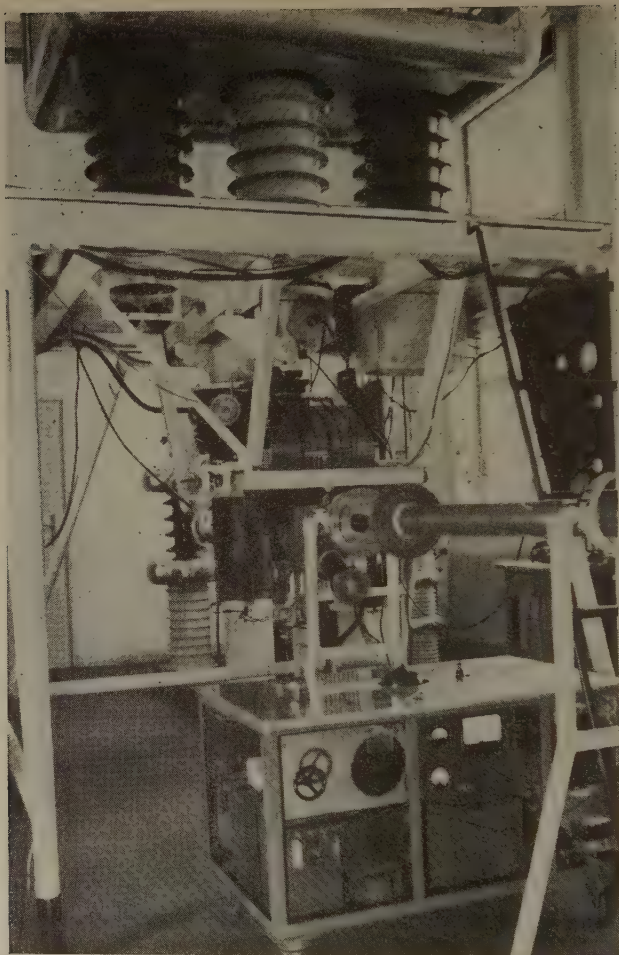


Fig. 5. View of the 200 keV accelerator, deflector magnet and high frequency oscillator

anode of the multiplier has an amplitude of about 0,1 V and a rise-time of 1—3  $\mu\text{s}$ . After clipping with a shortened line it is amplified by a distributed amplifier. The characteristic data of the amplifier are the following ; frequency band : 10 kHz—170 MHz, gain : 25 dB at a matched output, input impedance : 150 ohms, tubes employed : 11 pieces of the EF 80 type [13].

The coincidence unit was of the crystal diode-bridge type similar to that described by Minton [14]. The resolution curve of the distributed amplifier — coincidence circuit system had a half-width of  $3 \cdot 10^{-9}$  sec at half-maximum, and an efficiency of 60%. It was checked by direct experiments, (see Fig. 8) that the resolution time was not increased by the rise-time limitation of the amplifier. The delay of the reference-pip was obtained by



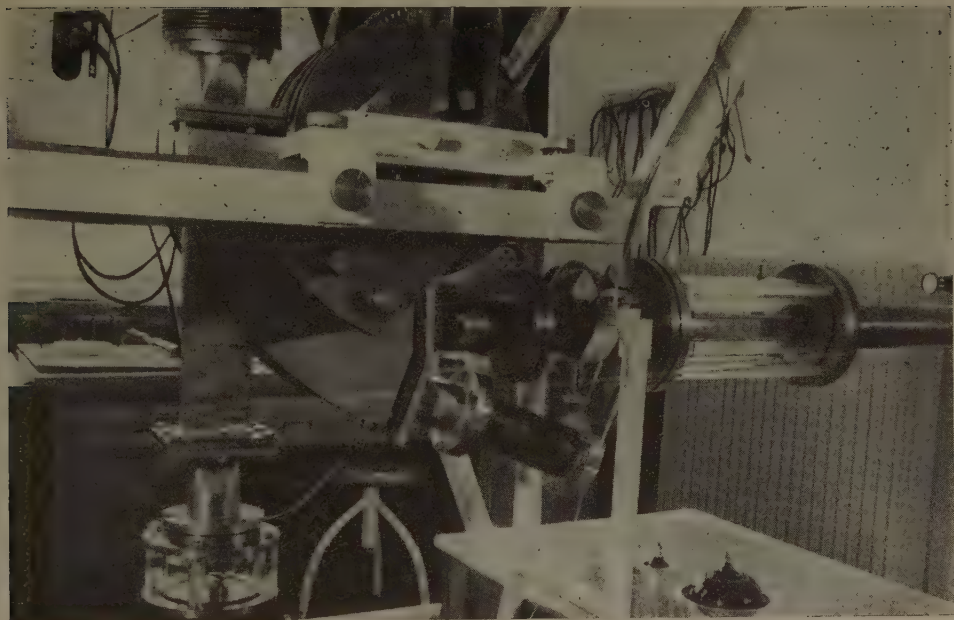


Fig. 6. Deflector magnet, electrical deflector plates

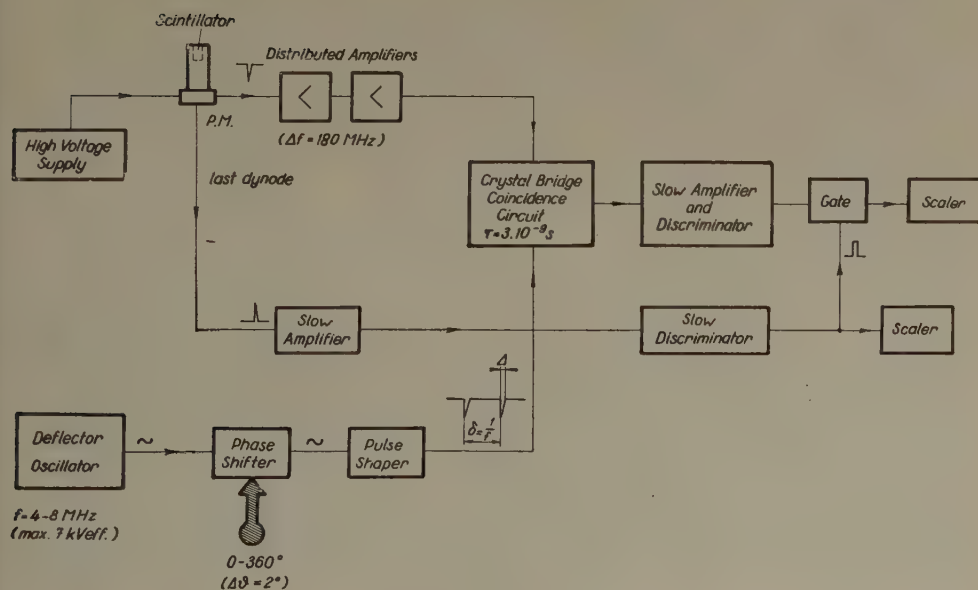


Fig. 7. Instrumentation diagram for fast neutron time-of-flight experiment

a precision wide-band phase shifter circuit, the input signal of which was derived directly from the deflector coil of the r. f. oscillator. In the 4—8 MHz band the error of the phase shifter was less than  $2^\circ$ . The phase of the output signal could be varied continuously in the 0— $360^\circ$  range. The null-comparison was carried out by a symmetrically driven squaring circuit consisting of two difference-amplifier stages. After clipping with a shortened line and further amplification the resulting signal had a half-width of 3—4  $\mu\text{sec}$ .

The positive signal from the last dynode was used for amplitude selection, the fast coincidence output being gated by a slow system (0,08  $\mu\text{sec}$  rise-time) consisting of a slow amplifier, integral discriminator and scaler. This is necessary to prevent the counting of neutrons from previous bursts and random coincidence pulses. The output of the slow system was used as a monitor.

For the measurement of neutron energy spectra we must determine the gated coincidence rate as the function of the phase-shift (i. e. constant time delay) which can be directly read off on the phase shifter. As our detector

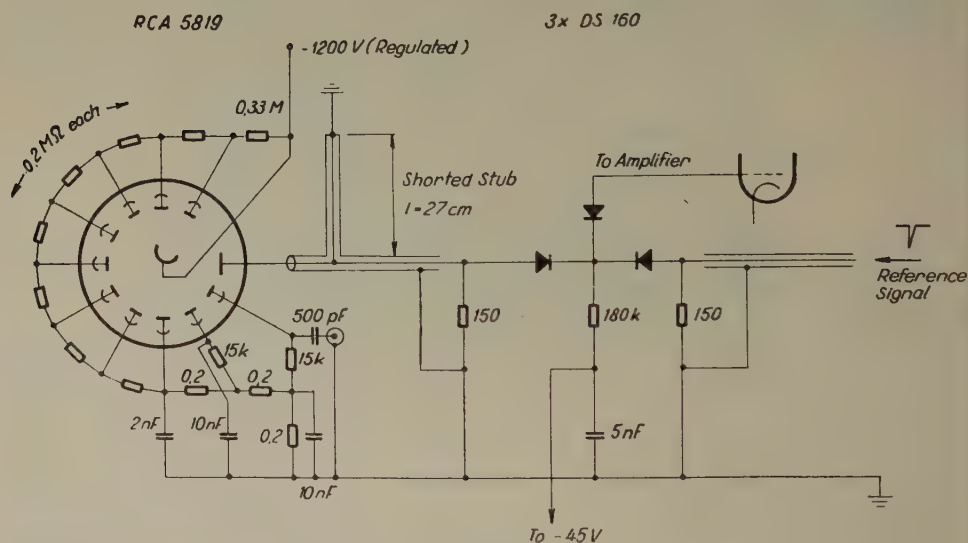


Fig. 8. Fast coincidence circuit

has a non-negligible efficiency for  $\gamma$  rays, the physical zero can be measured as an intense group in the neutron spectra caused by inelastic  $\gamma$  rays.

To prove the whole system, we measured the direct target spectrum of a zirconium-target (Fig. 9). The double representation was introduced for control purposes: it is a direct consequence of the fact that neutron bursts are produced at each null transition of the r. f. signal, i. e. at a double rate

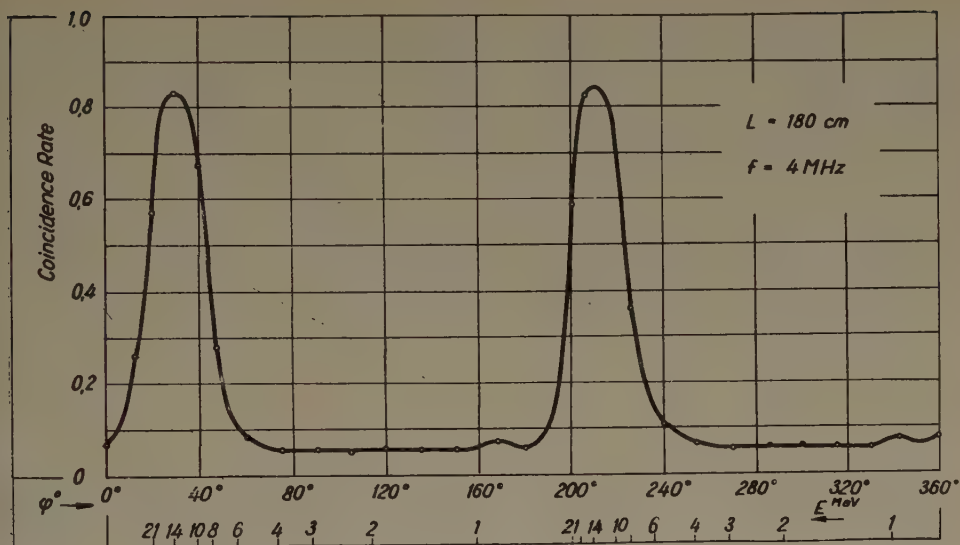


Fig. 9. Direct target spectrum of neutrons from T/d, n/He<sup>4</sup> reaction

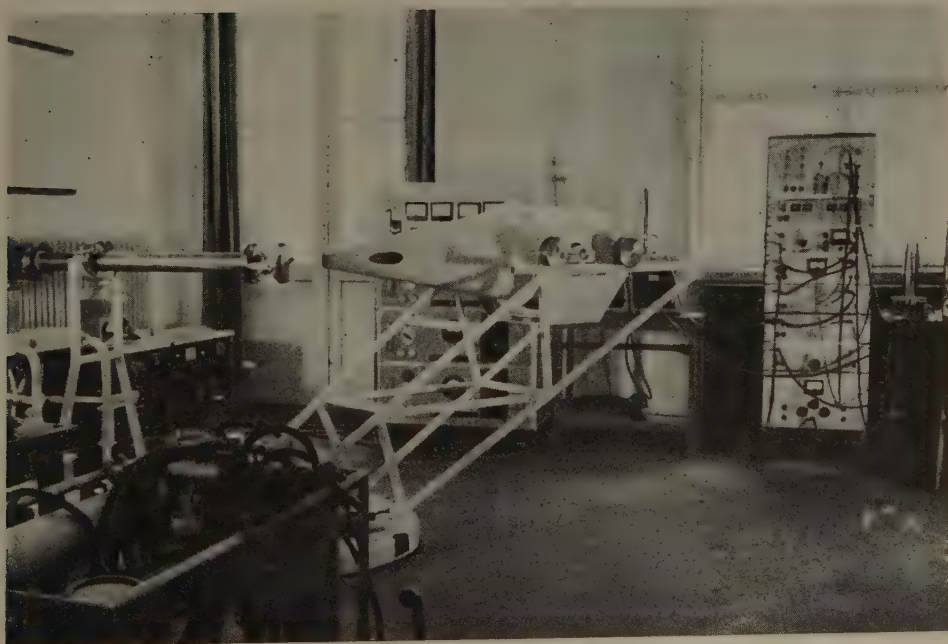


Fig. 10. Target, collimator system and fast electronics

as to the reference signal. From Fig. 9 it can be seen that the spectrometer is able to investigate neutron spectra in the desired energy range, improvements of the resolution curve and background effects, however, are necessary and are in progress.

The physical arrangement of the target, collimator and fast electronics is shown in Fig. 10.

The authors wish to thank all those who helped them in their work, especially I. MÉREY and M. UZSOKY, for their excellent suggestions in the mechanical and electrical design, E. DEBRECZENY and the electronic group for the development of the slow-electronics.

### Summary

A fast neutron spectrometer is described, which was developed for the measurement of inelastic neutron spectra in the energy range of 0.8–14 MeV. The fast neutron bursts are produced by electronic means deflecting the 200 keV beam of a Cockroft-Walton type accelerator. The neutron detector is a plastic scintillator; the neutron signals are analysed by a fast time analyzer of the single-channel type. The duration of neutron bursts is 1–3 mμsec, the time resolution is about 5 mμsec.

### References

- 1–5. HUGHES, MOSTOVOI et al; WLADIMIRSKY, WIBLIN, HAVENS, Proc. Int. Conf. Geneva 1955, Sel. Ref. Mat. Vol. IV. pp 1–97.
6. ROSEN, L., STEWART, L.: Phys. Rev. **107**, 824 (1957).
7. ROSEN, L., Proc. Int. Conf. Genf 1955, Sel. Ref. Mat. Vol. IV. p. 97.
8. JOHNSON, C. H., TRAIL, C. C.: Rev. Sci. Instr. **27**, 468 (1956).
9. SCANLON, J. P. et al., Rev. Sci. Instr. **28**, 749 (1957).
10. CRANBERG, L., LEVIN, J. S., Phys. Rev. **103**, 343 (1956).
11. ERŐ, J., Acta Physica **5**, 391 (1955).
12. FEHÉR, I., HREHUSS, GY., TiD és ZrD targetek készítése, to be published in KFKI Közlemények (Proc. of the Central Research Institut of Physics, Budapest).
13. NESZMÉLYI, A.: Láncerosítók (to be published in KFKI Közl.).
14. MINTON, J. Res. Nat. Bureau of Standards **57**, p. 119 (1956 Sept.).

Prof. K. SIMONYI, Budapest, Budafoki út 8., Hungary



# ON IMPROVEMENT OF THE RUNGE—KUTTA—NYSTRÖM METHOD. I.

By

T. FREY

Institute of Mathematics IV, of the Polytechnic University, Budapest

(Received March 19, 1958)

## 1. §. Introduction

The so-called Runge—Kutta—Nyström method is very often applied to the numerical evaluation of the initial value problems of ordinary differential equations, particularly in the initial interval (s. [1], [2]).

The equation, or system of two or more equations, is usually reduced to the form

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; \dots; y^{(n-1)}),$$

resp.

$$\frac{d}{dx} y_i = f(x; y_1; y_2; \dots; y_n); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

The evaluation of the function values  $f$  resp.  $f_i$  is a quite laborious and burdensome problem even when employing any of the most practical numerical method, by making use of modern electronic calculators. The question is important from that point of view whether the Runge—Kutta—Nyström method (further R. C. N.) can be improved by decreasing the number of the pivotal points at which the function values  $f$  resp.  $f_i$  are to be evaluated even at the price of increasing the number of elementary operations. This means that we intend to increase the degree of the R. C. N. method (over four), without increasing the number of the pivotal points at which the function values are to be evaluated.\* But it can't be carried out without making modification in the procedure, because — as will be seen — increasing the degree of the unmodified R. C. N. method, immediately by leaps and bounds increases the number of the pivotal point at which the function values are to be evaluated. As an illustration: employing the unmodified R. C. N. method of fifth, sixth, seventh resp. eighth degree, we have to evaluate the function values at six, eight, eleven resp. fifteen points by each step,

\* The degree of a procedure means the number of the terms equal in the Taylor expansion of the exact and of the approximative solution.

for first-order differential equation. Moreover, by increasing the degree, the parameter values of the procedure can only be computed with more and more difficulties.\*

In the following, a modification of the original method is presented, partly to increase the degree almost as speedily as the number of the pivotal values increase, partly for the easier evaluation of the parameters. The fundamental idea for this modification is to make use of the partial derivatives of the function(s)  $f(f_i)$  with respect to the numerical approach in the dependent variables.

In the first part of this work the modification will be presented — restricted to first-order equations — further it will be shown that the degree, both of the unmodified and of the modified R. C. N. method, at least theoretically, can be indefinitely increased. In the second part, the above-mentioned procedure will be generalized for the case of higher-order equations, finally the third part deals with the algorithmes, by means of which the parameters can, at least partly, be computed.

## 2. §. The Taylor series of the exact solution

21. *Symbols ; reductions ; of the operator D.* It may be assumed that the equation is given by the form

$$y' = f(x, y) \quad (21.1)$$

because the equation can surely be reduced to the above-mentioned form, in the surroundings of the points at which the approximate values of the solution are to be evaluated. Moreover, it will be assumed that  $f(x, y)$  and its derivatives of a sufficient high order with respect to both variables are continuous in the surroundings of the point  $(x_0, y_0)$  for in the surroundings of singular points numerical methods are not used.

It is convenient to express the higher-order derivatives of the solution of the equation (21.1) by means of the operator

$$D_f = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} ; f = f(x, y) \quad (21.2)$$

as suggested by HEUN, further denoting it by  $D$ , if there is no misunderstanding to be feared. Let us suppose that the function

$$u = u(x, y) \quad (21.3)$$

\* In the third part of this work, algorithmes will be shown as how to determine the parameters of the unmodified and modified R. C. N. method.

is differentiable in STOLZ's sense, in the domain  $T$  involving the point  $(x_0, y_0)$ , if  $f$  is continuous in  $T$ . In this case  $u$  is differentiable along the solving-curve\* of the equation (21.1) supposing that  $(x_0, y_0)$  is a point of the curve, as follows

$$\left. \frac{d}{dx} u(x, y) \right|_{y=y(x)} = \frac{\partial u}{\partial x} + y' \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial u}{\partial y} = D_f u = Du \quad (21.4)$$

It can easily be seen that

1°  $D$  is a linear operator, namely

$$D(u + v) = Du + Dv \quad (21.5)$$

2°  $D$  is of differential-operator type, applied to products

$$D(uv) = vDu + uDv \quad (21.6)$$

It is convenient to define the powers of  $D$  formally by

$$D^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \frac{\partial^n}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (21.7)$$

because by means of these the iterated values for  $D$ , and the higher-order derivatives of  $u$  with respect to  $y$  can be obtained in a very simple manner. It is easy to verify, that

$$D(D^n) = D^{n+1} + n Df D^{n-1} \frac{\partial}{\partial y} \quad (21.8)$$

(see e. g. [3]).

22. *The Taylor series expansion.* The derivatives of the solution of the equation (21.1), and its Taylor expansion can also be written by means of the operator  $D$  (supposing that  $f(x, y)$  and its derivatives of sufficient high-order are continuous at the specified point) is as follows

$$\frac{d}{dx} y = f \quad (22.1)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y = Df \quad (22.2)$$

\* As  $f$  is continuous in  $T$ , there exists at least one solving curve through any point of  $T$ ; if more exist through each point, the formula (21.4) is valid along each of them.

$$\frac{d^3}{dx^3} y = D^2 f + f_y Df \quad (22.3)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} y = D^3 f + f_y D^2 f + f_y^2 Df + 3 Df_y Df \quad (22.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^5}{dx^5} y = & D^4 f + f_y D^3 f + f_y^2 D^2 f + 4 Df_y D^2 f + f_y^3 Df + \\ & + 7 f_y Df_y Df + 6 D^2 f_y Df + 3 f_{yy} (Df)^2 \end{aligned} \quad (22.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^6}{dx^6} y = & D^5 f + f_y D^4 f + f_y^2 D^3 f + 5 Df_y D^3 f + f_y^3 D^2 f + 9 f_y Df_y D^2 f + \\ & + 10 D^3 f_y D^2 f + 10 f_{yy} D^2 f Df + f_y^4 Df + 12 f_y^2 Df_y Df + \\ & + 16 f_y D^2 f_y Df + 13 f_y f_{yy} (Df)^2 + 15 (Df_y)^2 Df + \\ & + 10 D^3 f_y Df + 15 Df_{yy} (Df)^2 \end{aligned} \quad (22.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^7}{dx^7} y = & D^6 f + f_y D^5 f + f_y^2 D^4 f + 6 Df_y D^4 f + f_y^3 D^3 f + \\ & + 11 f_y Df_y D^3 f + 15 D^2 f_y D^3 f + 15 f_{yy} D^3 f Df + f_y^4 D^2 f + \\ & + 15 f_y^2 Df_y D^2 f + 25 f_y D^2 f_y D^2 f + 45 f_y f_{yy} D^2 f Df + \\ & + 24 (Df_y)^2 D^2 f + 20 D^3 f_y D^2 f + 60 Df_{yy} D^2 f Df + \\ & + 10 f_{yy} (D^2 f)^2 + f_y^5 Df + 18 f_y^3 Df_y Df + 31 f_y^2 D^2 f_y Df + \\ & + 38 f_y^2 f_{yy} (Df)^2 + 57 f_y (Df_y)^2 Df + 30 f_y D^3 f_y Df + \\ & + 75 f_y Df_{yy} (Df)^2 + 15 D^4 f_y Df + 81 D^2 f_y Df_y Df + \\ & + 63 f_{yy} Df_y (Df)^2 + 45 D^2 f_{yy} (Df)^2 + 15 f_{yyy} (Df)^3; \end{aligned} \quad (22.7)$$



In the theorem which follows, the derivatives  $\frac{d^n}{dx^n} y(x)$  are given.

22.1. *Theorem.* In the expansion of the higher-order derivatives of  $y$  1° every term can only contain factors taking the following form

$$D^k \frac{\partial^l f}{\partial y^l}; \quad k \geq 0; \quad l \geq 0 \quad (22.8)$$

specially

$$D^\circ \frac{\partial f}{\partial y^l} \equiv \frac{\partial f}{\partial y^l}; \quad D^k \frac{\partial^\circ f}{\partial y^\circ} \equiv D^k f; \quad D^\circ \frac{\partial^\circ f}{\partial y^\circ} \equiv 1 \quad (22.9)$$

2° In the term taking the form of

$$\prod_{m=1}^p D^{l_m} \frac{\partial^{l_m} f}{\partial y^{l_m}} \cdot \prod_{M=1}^{\infty} D^{K_M} f \quad (22.10)$$



(there only exist terms of this type according to 1°, and  $K_M \neq 0$ ;  $M = 1, 2, \dots, q$ ); (the arrangement is natural that is  $\prod_{m=1}^p l_m \neq 0$ ) there is a relation between the “exponents”  $k_m$ ,  $K_M$ , and the “ordial numbers”  $l_m$

$$q = 1 + \prod_{m=1}^p l_m - p \quad (22.11)$$

from which immediately follows that

$$q \geq 1$$

3° Whenever the term (22.10) occurs in the expansion of  $y^{(n+1)}$ , there is another relation between the exponents and the ordial numbers

$$\sum_{m=1}^p k_m + \sum_{m=1}^p l_m + \sum_{M=1}^q K_M = n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (22.13)$$

4° In the expansion of  $y^{(n+1)}$  are those, and only those terms which suit the above-prescribed requirements of 1°—3°.

These propositions can be proved by means of the mathematical induction. Let us suppose that the propositions 1°—4° are valid until  $n = N$ , namely

$$y^{(N)} = \sum_i A_i \prod_{m=1}^{p_i} D_m^{(i)} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y_m^{l_m^{(i)}}} \prod_{M=1}^{q_i} D_M^{K_M^{(i)}} f \quad (22.14)$$

and

$$1^\circ. k_m^{(i)} \geq 0; l_m^{(i)} \geq 0; K_M^{(i)} \geq 1;$$

$$2^\circ. q_i = 1 - p_i + \sum_{m=1}^{c_i} l_m^{(i)}; (q_i \geq 1);$$

$$3^\circ. \sum_{M=1}^{p_i} (k_m^{(i)} + l_m^{(i)}) + \sum_{M=1}^{q_i} K_M^{(i)} = N - 1;$$

4° The sum (22.14) contains all the terms which suit the above requirements of 1°—3° prescribed.  $y^{(n+1)}$  can easily be expressed by means of  $D$ , using the relations (21.5)—(21.8). Hence it can be immediately seen that 1° is valid again. In order to prove 2°, let us consider all the terms derived from

$$\prod_{m=1}^{p_i} D_m^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y_m^{l_m^{(i)}}} \prod_{M=1}^{q_i} D_M^{K_M^{(i)}} f$$

Whenever  $D$  is applied to one of the factors of the first group — e. g. to the  $s$ -th one — it takes the following form

$$D^{k_s^{(i)}+1} \frac{\partial l_s^{(i)} f}{\partial y^{l_s^{(i)}}} \cdot \left\{ \prod_{m=1}^{s-1} \cdot \prod_{m=s+1}^{p_i} \right\} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial l_m^{(i)} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \prod_{M=1}^{q_i} D^{k_M^{(i)}} f +$$

$$(if k_s^{(i)} > 0) + k_s^{(i)} D^{k_s^{(i)}-1} \frac{\partial l_s^{(i)}+1 f}{\partial y^{l_s^{(i)}+1}} \left\{ \prod_{m=1}^{s-1} \cdot \prod_{m=s+1}^{p_i} \right\} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial l_m^{(i)} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} Df \cdot \prod_{M=1}^{q_i} D^{k_M^{(i)}} f \quad (22.15)$$

2° is evidently valid for the first term of the relation (22.15), because  $q_i, p_i$  and  $\Sigma l_m^{(i)}$  are unchanged; similarly, valid also to the second term, because  $p_i$  is unchanged while both  $q_i$  and  $\Sigma l_m^{(i)}$  increase — after regrouping — with the unit.

When  $D$  is applied to the  $S$ -th factor of the second group, it takes the following form

$$\prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial l_m^{(i)} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \cdot D^{K_s^{(i)}+1} f \cdot \left\{ \prod_{M=1}^{S-1} \cdot \prod_{M=S+1}^{q_i} \right\} D^{K_M^{(i)}} f +$$

$$+ K_s^{(i)} \prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial l_m^{(i)} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \cdot D^{K_s^{(i)}-1} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Df \left\{ \prod_{M=1}^{S-1} \cdot \prod_{M=S+1}^{q_i} \right\} D^{K_M^{(i)}} f \quad (22.16)$$

Here 2° becomes valid again, because: in the first term  $p_i, q_i$  and  $\Sigma l_m^{(i)}$  are unchanged; in the second term  $q_i$  is unchanged, while both  $p_i$  and  $\Sigma l_m^{(i)}$  increase with the unit. By reason of the relations (22.15) and (22.16) it can be seen that  $q_i$  cannot be decreased, and so  $q_i$  remains  $\geq 1$ . The sum  $\Sigma (k_m^{(i)} + l_m^{(i)}) + \Sigma K_M^{(i)}$  increases in each of its terms with the unit, and so 3° remains valid in every term of  $y^{N+1}$ .

The validity of 4° can be proved as follows: every term of  $y^{N+1}$ , which has the form (22.10) and is in accordance to the properties 1°—3°, can be derived from one of the term of  $y^{(N)}$  by means of the operation  $D$ .

Let the product then

$$\prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial l_m^{(i)} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \prod_{M=1}^{q_i} D^{K_M^{(i)}} f \quad (22.17)$$

one of the terms of the Taylor expansion for  $y^{(N+1)}$ , that is

$$1^\circ. k_m^{(i)} \geq 0; l_m^{(i)} \geq 0; K_M^{(i)} \geq 1;$$

$$2^\circ. q_i = 1 - p_i + \sum_{m=1}^{p_i} l_m^{(i)}; (q_i \geq 1);$$

$$3^\circ. \sum_{m=1}^{p_i} (k_m^{(i)} + l_m^{(i)}) + \sum_{M=1}^{q_i} K_M^{(i)} = N. \quad (22.18)$$

Let us moreover suppose that there is at least one factor — e. g. the  $S$ -th one — among the factors of the second group in (22.17), by which

$$K_S^{(i)} > 1. \quad (22.19)$$

In this case, for instance, (22.17) is derived from the term

$$\prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \cdot \left\{ \prod_{M=1}^{S-1} \cdot \prod_{M=S+1}^{r_i} \right\} D^{K_M^{(i)}} f \cdot D^{K_S^{(i)}-1} f \quad (22.20)$$

of the Taylor expansion for  $y^{(N)}$  by means of the operation  $D$ . One must only realize that  $y^{(N)}$  has a term such as (22.20). If this term satisfies the properties of 1°—3°,  $y^{(N)}$  will surely have such a term, but, according to the conditions, even if the requirement 4° is satisfactory, supposing that  $n = N$ . It is easy to see that 1° is satisfactory; 2° is realized for  $q_i, p_i$  and  $\Sigma l_m^{(i)}$  are unchanged in comparison to (22.17); 3° is also valid, because  $\Sigma l_m^{(i)}$  and  $\Sigma k_m^{(i)}$  remain unchanged,  $\Sigma K_M^{(i)}$  decreased with the unit, but the right-hand member of 3° must also be decreased with the unit, being (22.20) a term of  $y^{(N)}$ .

If it is impossible to find such an  $S$ , which satisfies (22.19), namely  $S$  has the form

$$\prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \cdot (Df)^{q_i}, \quad (22.17^*)$$

then — by reason of (22.18) —  $p_i > 0$ , supposing that  $n \geq 3$ . Now let us suppose that among the factors of the first group there exists one — e. g.  $s$ -th one — by which

$$k_s^{(i)} \geq 1 \quad (22.21)$$

In this case, for instance, (22.17\*) can be derived from the term

$$D^{k_s^{(i)}-1} \frac{\partial^{l_s^{(i)}} f}{\partial y^{l_s^{(i)}}} \cdot \left\{ \prod_{m=1}^{s-1} \cdot \prod_{m=s+1}^{p_i} \right\} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} (Df)^{q_i} \quad (22.22)$$

of  $y^{(N)}$  by means of the operation  $D$ . This proves that  $y^{(N)}$  has a term formed like (22.22) and is the same as above: 1° is evidently satisfied; 2° is realized, because  $q_i, p_i$  and  $\Sigma l_m^{(i)}$  are unchanged in (22.22); 3° is also valid, for  $\Sigma K_M$  and  $\Sigma l_m^{(i)}$  are unchanged and  $\Sigma k_m^{(i)}$  is decreased with the unit, in comparison to (22.17\*), for it is necessarily one of the terms talked about with the unit lower-order derivative.

If, finally, one can't find any  $s$  which satisfies (22.21), that is (22.17) takes the form

$$\prod_{m=1}^{p_i} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y_m^{l_m^{(i)}}} \cdot (Df)^{q_i} \quad (22.17^{**})$$

then this latter product can, for instance, be derivated from the term

$$D \frac{\partial^{l_1^{(i)}-1} f}{\partial y_1^{l_1^{(i)}-1}} \prod_{m=2}^{p_i} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y_m^{l_m^{(i)}}} \cdot (Df)^{q_i-1} \quad (22.23)$$

of  $y^{(N)}$  by means of the operation  $D$  (as the second term)  $y^{(N)}$  really contains the product (22.23), because it satisfies the properties  $1^\circ-3^\circ$ ,  $1^\circ$  is satisfied; the equality is again, valid, because both  $q_i$  and  $\Sigma l_m^{(i)}$  are decreased with the unit in comparison to (22.17\*);  $3^\circ$  is valid too, for  $q_i = \Sigma k_m^{(i)}$  is decreased,  $\Sigma k_m^{(i)} = 1$  is increased and  $\Sigma l_m^{(i)}$  is decreased with the unit, so their sum is decreased with the unit.

The theorem is proved, because its propositions are evidently valid  $N = 2, 3, \dots, 7$ , by reason of (22.1)—(22.7)

### 3. §. Numerical solution by Taylor series

**31. Formal evaluation.** Let us again, suppose that the function  $f(x, y)$  and its derivatives of sufficient high order, with respect to both variables, are continuous in the domain  $T$  involving the point  $(x_0, y_0)$  and the point  $[x_0 + \alpha; y_0 + \alpha f(x_0, y_0) + \beta]$  too.

**31.1. Lemma.** The above-mentioned condition requires that the Taylor expansion of the expression

$$\left. \frac{\partial^r f}{\partial y^r} \right|_{x_0 + \alpha; y_0 + \alpha f(x_0, y_0) + \beta} \quad (31.1)$$

can be given in the form

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^r f}{\partial y^r} + \alpha D \frac{\partial^r f}{\partial y^r} + \beta \frac{\partial^{r+1} f}{\partial y^{r+1}} + \frac{1}{2!} \left\{ \alpha^2 D^2 \frac{\partial^r f}{\partial y^r} + 2 \alpha \beta D \frac{\partial^{r+1} f}{\partial y^{r+1}} + \right. \\ & \left. + \beta^2 \frac{\partial^{r+2} f}{\partial y^{r+2}} \right\} + \dots + \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n \binom{n}{s} \alpha^{n-s} \beta^s D^{n-s} \frac{\partial^{r+s} f}{\partial y^{r+s}} + h_{n+1} \end{aligned} \quad (31.2)$$



where the functions are to be taken at the point  $(x_0, y_0)$  and the remainder is  $h_{n+1}$ .

*Proof:* The proposition can be easily verified by rearrangement. The expansion only contains the operations  $D$  and  $\frac{\partial}{\partial y}$  because the coefficient of  $f$  in the increment of  $y$  equals the increment of  $x$ .

The  $n$ -th term in the Taylor-series of the expression (31.1) has the form

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \frac{\partial^{r+n} f}{\partial x^{n-t} \partial y^{r+t}} \alpha^{n-t} (\alpha f + \beta)^t = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \frac{\partial^{r+n} f}{\partial x^{n-t} \partial y^{r+t}} \alpha^{n-t} \cdot \sum_{v=0}^t \binom{t}{v} \alpha^v f^v \beta^{t-v} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^n \sum_{v=0}^t \binom{n}{t} \binom{t}{v} \alpha^{n-(t-v)} \beta^{t-v} f^v \frac{\partial^{r+n} f}{\partial x^{n-t} \partial y^{r+t}} \end{aligned} \quad (31.3)$$

substituting  $z$  for  $(t-v)$

$$t-v=z \quad v=t-z; \quad (31.4)$$

So  $G_n$  takes the form

$$G_n = \frac{1}{n!} \sum_{t=0}^n \sum_{z=0}^t \binom{n}{t} \binom{t}{t-z} \alpha^{n-z} \beta^z f^{t-z} \frac{\partial^{r+n} f}{\partial x^{n-t} \partial y^{r+t}}. \quad (31.5)$$

In the following the double sequence of sums are inverted. Substituting  $s$  for  $t$  by the relations as follows

$$t-z=s; \quad t=s+z \quad (31.6)$$

So

$$\begin{aligned} G_n &= \frac{1}{n!} \sum_{z=0}^n \alpha^{n-z} \beta^z \sum_{t=z}^n \binom{n}{t} \binom{t}{t-z} f^{t-z} \frac{\partial^{r+n} f}{\partial x^{n-t} \partial y^{r+t}} = \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{z=0}^n \binom{n}{z} \alpha^{n-z} \beta^z \sum_{s=0}^{n-z} \binom{n}{s+z} \binom{s+z}{s} f^s \frac{\partial^{r+n} f}{\partial x^{n-(s+z)} \partial y^{r+(s+z)}}. \end{aligned} \quad (31.7)$$

Now only that is to be considered that on one hand

$$\frac{\binom{n}{s+z} \binom{s+z}{s}}{\binom{n}{z}} = \frac{n!}{(s+z)! (n-s-z)!} \cdot \frac{(s+z)!}{s! z!} = \frac{n-z!}{s! (n-z-s)!} = \binom{n-z}{s} \quad (31.8)$$

and further, on the other hand

$$\sum_{s=0}^{n-z} \binom{n-z}{s} f^s \frac{\partial^{r+z+(n-z)}}{\partial x^{(n-z)-s} \cdot \partial y^{r+z+s}} = D^{n-z} \frac{\partial^{r+z} f}{\partial y^{r+z}}$$

by reason of the powers of  $D$ . Taking (31.8) and (31.9) into consideration, in (31.7) our proposition which had to be proved turns out to be right.

32. *The terms of the expansion.* In the following it will be shown that the power series of the numerical solution contains only terms, and in certain degrees all terms, that also occur in the power series of the exact solution — whether the unmodified or the modified R. C. N. method is used.

For characterising the steps, we intend to introduce the so-called step-distance, — indicating it by  $h$  — which serves the independent variable resp. its increment. So the series of the exact solution for the equation (21.1) takes the form

$$\begin{aligned} \Delta y = y(x_0 + h) - y(x_0) &= hf + \frac{h^2}{2!} Df + \frac{h^3}{3!} (D^2f + f_y Df) + \\ &+ \dots + \frac{h^n}{n!} \sum_i \frac{A_i^{(n)}}{i} \prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \cdot \prod_{M=1}^{q_i} D^{K_M^{(i)}} f + R_{n+1} \end{aligned} \quad (32.1)$$

where the general term is denoted in accordance with part 22. and  $R_{n+1} = 0(h^{n+1})$ .\*

Let

$$k = hf(x_0 + a; y_0 + af + \beta) \quad (32.2)$$

and let us denote with  $\beta$  any linear combination of the terms at least of second order in  $h$ , which occurs in the expansion of  $\Delta y$ ;

$$\begin{aligned} \beta &= b_1^{(1)} h^2 Df + h^3 [b_1^{(2)} D^2f + b_2^{(2)} f_y Df] + \dots + \\ &+ h^n \sum_i b_i^{(n)} \prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \prod_{M=1}^{q_i} D^{K_M^{(i)}} f + \dots \end{aligned} \quad (32.3)$$

and with  $\alpha_1$  a similar linear combination, but only those coefficients of its terms can vanish, that contain the factor  $Df$ , finally let  $\alpha$  the ratio of  $\alpha_1$  and  $hDf$ .

\* Here and in the following let us suppose that  $f(x, y)$  and its derivatives of sufficient high order, with respect to both variables, are continuous in the surrounding of the point  $(x_0, y_0)$ .

$$\begin{aligned} \alpha = & a_1^{(1)} h + a_2^{(2)} h^2 f_y + h^3 [a_3^{(3)} \cdot f_y^2 + a_4^{(3)} Df_y] + \dots + \\ & + h^{n-1} \sum_i^* a_i^{(n)} \prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \cdot \prod_{M=2}^{q_i} D^{K_M^{(i)}} f + \dots \end{aligned} \quad (32.4)$$

where  $\Sigma^*$  only extends to the terms of  $y^{(n)}$  that have contained  $Df$ , and the second factor-group is indexed, so that  $K_1^{(i)} = 1$ .

32.1. *Lemma.* The Taylor expansion of the increment  $k$  (32.2) about  $h$ , only contains terms that occur in the expansion of the exact solution too.

Proof: We shall apply the lemma 31.1, substituting the expressions (32.4) resp. (32.3) for  $\alpha$  resp.  $\beta$ , if specially  $r = 0$ . Let us consider e. g. the terms formed

$$h a^{n-s} \beta^s D^{n-s} \frac{\partial^s f}{\partial y^s} \quad (32.5)$$

coming from the reduction of the expression

$$\begin{aligned} h [a_1^{(1)} h + a_2^{(2)} h^2 f_y + \dots]^{n-s} \cdot [b_1^{(1)} h^2 Df + h^3 (b_1^{(2)} D^2 f + \\ + f_y Df) + \dots]^s \cdot D^{n-s} \frac{\partial^s f}{\partial y^s}. \end{aligned} \quad (32.6)$$

We have to show that the propositions 1°—3° of the theorem 22.1 only hold for the terms above mentioned. It is trivial that these terms may contain only factors formed  $D^k \frac{\partial^l f}{\partial y^l}$ ; similarly the condition  $k \geq 0$ ,  $l \geq 0$  is valid, too. The condition  $k + l \geq 1$  is also trivial, because it holds for all factor of  $\alpha$  and  $\beta$ , and if  $n \geq 1$  for  $D^{n-s} \frac{\partial^s f}{\partial y^s}$  too. 2° is also valid. According to (32.3) the equality

$$q_\beta = 1 + \sum'_m l_m - p_\beta \quad (32.7)$$

holds for any term of  $\beta$ . According to (32.4) the equality

$$q_\alpha = \sum'_m l_m - p_\alpha \quad (32.8)$$

holds for any term of  $\alpha$ . (Divided by  $Df$ ).

So the equalities

$$q_{II} = s q_\beta = s + \sum'_{II} l_m - p_{II} \quad (s \geq 1) \quad (32.9)$$

hold for any term of the second factor (coming from the raising of  $s$ -th to power).

On the other hand the equation

$$q_l = \sum_m r l_m - p_l \quad (32.10)$$

holds for any expanded term of the first factor. For any term of their product holds

$$q_r = \begin{cases} \sum_m r l_m - p_r, & \text{if } s = 0 \\ s + \sum_m r l_m - p_r, & \text{if } s > 0 \end{cases} \quad (32.11)$$

Finally, the factor  $D^{n-s} \frac{\partial^s f}{\partial y^s}$  increases  $q$  with the unit compared with  $q_r$  if  $s = 0$ ,  $\sum l_m$  and  $p$  remain unchanged, thus really

$$q = 1 + \sum_m l_m - p.$$

If  $s > 0$ ,  $q$  remains unchanged, that is equal to  $q_r$  but  $\sum l_m = \sum_r l_m + s$  and  $p = p_r + 1$ , and so again

$$q = s + \sum_m l_m - s - (p - 1) = 1 + \sum_m l_m - p.$$

The validity of 3° can be shown in the same way; for any term of  $\beta$  containing  $h^b$

$$\sum_m^\beta (l_m + k_m) + \sum_M^\beta K_M = b - 1 \quad (32.12)$$

thus for any term of  $\beta^s$  containing  $h^{sb}$

$$\sum_m^{I\beta} (l_m + k_m) + \sum_M^{I\beta} K_M = sb - s. \quad (32.13)$$

Likewise for any term of  $\alpha$  containing  $h^a$

$$\sum_m^a (k_m + l_m) + \sum_M^a K_M = a - 1, \quad (32.14)$$

thus for any term of  $\alpha^{n-1}$  containing  $h^{(n-s)a}$

$$\sum_m^I (k_m + l_m) + \sum_M^I K_M = (n - s) a - (n - s) \quad (32.15)$$



and so, for any term of  $\alpha^{n-s} \beta^s$  containing  $h^{sb+(n-s)a}$

$$\sum'_r (k_m + l_m) + \sum'_M K_M = sb - s + (n-s)a - (n-s) \quad (32.16)$$

The result of the multiplication by  $D^{n-s} \frac{\partial^s f}{\partial y^s}$  is

$$\sum'_r (k_m + l_m) = \sum'_m (k_m + l_m); \sum'_r K_M + n = \sum'_M K_M \quad (32.17)$$

if  $s = 0$

$$\begin{aligned} \sum'_r k_m + n - s &= \sum'_m k_m; \sum'_r l_m + s = \sum'_m l_m; \\ \sum'_r K_M &= \sum'_M K_M; \sum'_r (k_m + l_m) + n = \sum'_M (k_m + l_m); \end{aligned}$$

if  $s > 0$

$$(32.18)$$

and so for any term of (32.6) containing the factor  $h^{sb+(n-s)a+1}$

$$\sum'_m (k_m + l_m) + \sum'_M K_M = n + sb - s + (n-s)a - (n-s) = sb + (n-s)a. \quad (32.19)$$

This completes the proof for the theorem.

32.2. *Lemma* is more difficult to verify: The  $n$ -th partial sum of the Taylor expansion of (32.2) contains every term which occurs in its exact increment, if  $a_1^{(1)} \neq 0$  in the expansion of  $\alpha$  (32.4) and  $b_i^{(k)} \neq 0$  in the expansion of  $\beta$  (32.3), supposing that  $k \leq n-1$ .\*

*Proof:* The proposition will be verified based upon the lemma 31.1 using the formulas (32.4) and (32.3) and the conditions of the coefficients related to these formulas. Let us now consider an optional term in the expansion of  $\Delta y$ , if  $s \leq n$

$$h^s \prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \cdot \prod_{M=1}^{r_i} D^{K_M^{(i)}} f = k_i^{(s)} \quad (32.20)$$

where then

$$1^\circ. k_m^{(i)} \geq 0; l_m^{(i)} \geq 0; K_M^{(i)} \geq 1;$$

$$2^\circ. q_i = 1 + \sum_{m=1}^{p_i^{(s)}} l_m^{(i)} - p_i; q_i \geq 1;$$

$$3^\circ. \sum_{m=1}^{p_i^{(s)}} (k_m^{(i)} + l_m^{(i)}) + \sum_{M=1}^{r_i^{(s)}} K_M^{(i)} = s - 1. \quad (32.21)$$

\* That is, if every term really occurs in the expansion of  $\beta$  till the  $(n-1)$ -th power of  $h$  inclusive.

In the following it will be verified that the Taylor-expansion of  $k$  has also terms formed like (32.20) in case of  $s \leq n$ ; e. g. such a term is to be found regrouped in the term of the form

$$h \frac{1}{(k_1^{(i)} + l_1^{(i)})!} \left( \frac{k_1^{(i)} + l_1^{(i)}}{l_1^{(i)}} \right) \cdot a_1^{k_1^{(i)}} \beta_1^{l_1^{(i)}} D^{k_1^{(i)}} \frac{\partial_1^{l_1^{(i)}} f}{\partial y_1^{l_1^{(i)}}} \quad (32.23)$$

by proceeding in ascending integral powers of  $h$ .

Namely let us consider the term  $a_1^{(1)} h$  from the series (32.4) of  $a$ . We shall verify that the other factors of (32.20) are dividable into  $l_1^{(i)}$  groups that occur in the expansion of  $\beta$  (32.3) (e. g. in the special case when  $l_1^{(i)} = 0$  the first factor group of (32.20) becomes identically equal to the unit). First we have to see that in (32.20) there exists at the most  $l_1^{(i)}$  factors, even apart from the factor  $D^{k_1^{(i)}} \frac{\partial_1^{l_1^{(i)}} f}{\partial y_1^{l_1^{(i)}}}$ , namely also

$$h^{s-1-l_1^{(i)}-(k_1^{(i)}+l_1^{(i)})} \cdot \prod_{m=2}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial_m^{l_m^{(i)}} f}{\partial y_m^{l_m^{(i)}}} \prod_{M=1}^{q_i} D^{K_M} f \quad (32.20^*)$$

can be divided into  $l_1^{(i)}$  factor groups. But it can be immediately seen that the second factor group alone has at the most  $l_1^{(i)}$  factors as  $q_i \geq l_1^{(i)}$  by reason of the condition 2° in (32.21). A possibility for the division will be shown as follows, depending on the cases

$$a) p_i - 1 < l_1^{(i)} \quad \text{resp.} \quad b) p_i - 1 \geq l_1^{(i)}.$$

In case a) we connect to each factor as many factors of the second factor group (and from  $h$ ) as would comply with the requirements 1°—3° of the theorem 21.1 — so the expansion of  $\Delta y$  and the expansion of  $\beta$  will contain a so formed term, if the exponent  $h$  is not higher than  $(n-1)$ . Then we complete each of these from one among the factors of the second group to  $l_1^{(i)}$  factors — so that these factors will also comply with the requirements 1°—3° of 21.1 and will occur in the expansion of  $\beta$ . We have only to show that all the factors of (32.20\*) are only once used, moreover the sum of the exponents of  $h$  is equal to the exponent in (32.20\*). It is easy to show, as by reason of the requirement 2° we have to exactly connect

$$1 + l_m^{(i)} - 1 = l_m^{(i)} \quad (32.24)$$

factors from the second factor group to  $D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial_m^{l_m^{(i)}} f}{\partial y_m^{l_m^{(i)}}}$  thus

$$\sum_{m=2}^{p_i} l_m^{(i)} \quad (32.25)$$

factors to the  $(p_i - 1)$  groups in all, and so we still have

$$q_i - \sum_{m=2}^{p_i} l_m^{(i)} = 1 + l_1^{(i)} - p_i = l_1^{(i)} - [p_i - 1] \quad (32.26)$$

factors from the second factor group, just as many groups as we have to construct.

The exponent in the group

$$D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}}}{\partial y^{l_m^{(i)}}} \cdot \prod_{M=\gamma+1}^{\gamma+l_m^{(i)}} D^{K_M^{(i)}} f$$

(the required exponent of  $h$  by reason of 3°)

$$e_m = k_m^{(i)} + l_m^{(i)} + \sum_{M=\gamma+1}^{\gamma+l_m^{(i)}} K_M^{(i)} - 1 \quad (32.27)$$

and so the sum of the exponents

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{p_i} (k_m^{(i)} + l_m^{(i)}) + \sum_{M=1}^{q_i} K_M - l_1^{(i)} &= \sum_{m=1}^{p_i} (k_m^{(i)} + l_m^{(i)}) + \sum_{M=1}^{q_i} K_M - 2l_1^{(i)} - k_1^{(i)} = \\ &= s - 1 - l_1^{(i)} - (k_1^{(i)} + l_1^{(i)}) \end{aligned} \quad (32.28)$$

is equal to the exponent in (32.20\*).

In case b) the procedure is similar, but here exactly one factor will be attached to every group but  $p_i - l_1^{(i)}$  to the last group of the first factor group and so many factors from the second that every group would comply with the requirements 1°—2°. Similarly as in case a) one can see that (32.20\*) can be divided exactly into  $l_1^{(i)}$  groups, which comply with the requirements 1°—3° of the theorem 21.1 and which occur in  $\Delta y$ ; one can immediately see that every exponent of  $h$  in every group in (32.20\*) can not be higher than  $(n - 1)$ , if  $s \leq n$ , thus these terms occur in  $\beta$  and their product (32.20\*) occurs in  $\beta^{l_1^{(i)}}$ . This completes the proof of our theorem — also considering (32.23).

The lemma which follows can be similarly verified, where  $\alpha$  and  $\beta$  have the same significance as in (32.4) and (32.3).

32.3. *Lemma.* Let us consider the power series of

$$k^{(r)} = h \frac{\partial^r f}{\partial y^r} [x_0 + a; y_0 + af + \beta]; (r = 1, 2, \dots) \quad (32.29)$$

about  $h$ . In this case the expressions formed

$$[k^{(r)}]^s \cdot \beta^r \quad (s = 1, 2, \dots; r = 1, 2, \dots) \quad (32.30)$$

have an expansion  $\beta$  type, and the expression formed

$$[k^{(r)}]^s \cdot \beta^{r-1} \quad (s = 1, 2, \dots; r = 1, 2, \dots) \quad (32.31)$$

have an expansion  $\alpha$  type.

#### 4. §. On the improvement of the R. C. N. method

In the following it will be verified that both the unmodified and the modified R. C. N. method can be improved by optionally increasing the degree. The scheme of the unmodified Runge—Kutta—Nyström method is — using the greatest parameter number — as follows

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0; y_0) \\ k_2 &= hf[x_0 + c_1^{(1)}h; y_0 + c_1^{(1)}k_1] \\ k_3 &= hf[x_0 + c_1^{(2)}h; y_0 + c_1^{(2)}k_1 + c_2^{(2)}(k_2 - k_1)] \\ &\vdots \\ k_n &= hf[x_0 + c_1^{(n)}h; y_0 + c_1^{(n)}k_1 + c_2^{(n)}(k_2 - k_1) + \dots + \\ &\quad + c_n^{(n)}(k_{n-1} - k_1)], \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$k = c_1 k_1 + c_2 k_2 + \dots + c_n k_n \quad (4.2)$$

Where we evaluate the constants  $c_i^{(k)}$ ;  $c_i$ ; in all  $n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$  so, that the expansion of the  $k$  approximate "steps" correspond with the expansion of  $\Delta y$  till the highest degree inclusive as far as possible. According to the lemmas 32.1—32.2, it is to be noted that  $k$  contains all terms which occur in the  $n$ -th partial sum of the expansion of  $\Delta y$ , nevertheless in case  $n > 4$  the maximum parameter  $\frac{n(n+3)}{2}$  is not sufficient to make the equality of the coefficients sure in all such terms of the approximate and exact solution.

The maximum parameter number can be speedily increased by reason of the lemma 32.3, so that we include the evaluation of the  $k_i^{(r)}$  values in the unmodified R. C. N. scheme, as follows e. g.:



$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) \\
k_1^{(1)} &= hf_y[x_0 + c_1^{(1)}h; y_0 + c_1^{(1)}k_1] \\
k_2 &= hf[x_0 + c_1^{(2)}h + d_1^{(2)}k_1^{(1)}h + d_1^{(3)}k_1^{(1)2}h + \dots; y_0 + c_1^{(2)}k_1 + \\
&\quad + d_1^{(2)}k_1k_1^{(1)} + d_1^{(3)}k_1k_1^{(1)2} + \dots] \\
k_3 &= hf[x_0 + c_1^{(3)}h + d_1^{(3)}k_1^{(1)}h + d_2^{(3)}k_1^{(1)2}h + \dots; y_0 + c_1^{(3)}k_1 + \\
&\quad + c_2^{(3)}(k_2 - k_1) + d_1^{(3)}k_1^{(1)}h + d_2^{(3)}k_1^{(1)2}h + \dots + D_1^{(3)}k_1^{(1)}(k_2 - k_1) + \\
&\quad + D_2^{(3)}k_1^{(1)2}(k_2 - k_1) + \dots] \\
&\vdots \\
k_1^{(2)} &= hf_{yy}[x_0 + c_1^{(s)}h + d_1^{(s)}k_1^{(1)}h + \dots; y_0 + c_1^{(s)}k_1 + c_2^{(s)}(k_2 - k_1) + \dots \\
&\quad + d_1^{(s)}k_1^{(1)}k_1 + d_2^{(s)}k_1^{(1)2}k_1 + \dots + D_1^{(s)}k_1^{(1)}(k_2 - k_1) + \dots] \\
k_{s+1} &= hf[x_0 + c_1^{(s+1)}h + d_1^{(s+1)}k_1^{(1)}h + \dots + e^{(s+1)}k_1^{(2)}(k_2 - k_1) + \\
&\quad + \dots; y_0 + \dots + e_1^{(s+1)}k_1^{(2)} \cdot k_1(k_2 - k_1) + \dots + \\
&\quad + E_1^{(s+1)}k_1^{(2)}(k_2 - k_1)^2 + \dots];
\end{aligned} \tag{4.3}$$

etc.; finally

$$\begin{aligned}
k &= C_1k_1 + \dots + C_nk_n + C_{121}^{(1)}k_1^{(1)}(k_2 - k_1) + C_{131}^{(1)}k_1^{(1)}(k_3 - k_1) + \\
&\quad + \dots + C_{122}^{(1)}k_1^{(1)2}(k_2 - k_1) + \dots + C_{221}^{(1)}k_2^{(1)}(k_2 - k_1) + \dots + \\
&\quad + C_{121}^{(2)}k_1^{(2)}(k_2 - k_1)^2 + C_{132}^{(2)}k_1^{(2)}(k_3 - k_1)(k_2 - k_1) + \dots
\end{aligned} \tag{4.4}$$

It should be noted that the appearance that in the given way an infinity of parameters can be included even by finite degree, is only illusory, because the individual parameter will effect only after a partial sum of a certain degree. Even though, including the magnitudes of  $k_i^{(r)}$  type in the scheme — one can read it in formulas /4,3/ — /4,4/ — on one hand the number of parameters increases very rapidly, but on the other hand — we shall see — that the system of equations — which requires the same coefficients of the individual members of  $K_i$  and of  $\Delta y$  — for the evaluation of parameters falls into several systems, they can be solved independently, but only after including the magnitudes  $k_i^{(r)}$  — because the parameters in relating of the new type members appears only on a certain degree in the Taylor-expansion of  $K_i$ .

We will show, as follows, that both the unmodified and the modified R. C. N. method can be improved to a wished degree. We should mention in advance that the theorem is not pronounced in the most exact form, that is: we don't say that one needs exactly so many steps of  $k_i^{(r)}$  type for a given degree, which must be calculated in such an order of succession. The reason for this is: one can easily evaluate that making a certain number of auxiliary steps of  $k_i^{(r)}$  type in a given order up to which exponent of  $h$  in the approximate increment of  $k_i$  will be found all terms occurring in the exact increment;

how many independent parameters will be included in the method till the given degree, and whether their number is not smaller than the number of all terms of several type which occur in the exact solution till this degree — that is whether, supposing independent equations it is possible that the approximate and the exact increment will be equated by choosing suitable parameters. But in general it is nearly impossible to prove that the equations are really independent — and it may happen that making the same number of steps in several orders of succession the system of equations will sometimes be independent and sometimes not. As it is convenient to include in practice more than the required parameters in case of high orders of degree to make the system of equations manageable, and in eventual dependency cases with further steps to increase the number of occurring parameters, therefore it is sufficient to give the

4.5. *theorem* of fundamental importance by the value of which the R. C. N. method of optional degree can be given by means of sufficient  $k_i^{(r)}$  numerical steps.

Before demonstrating of a special sharpening of the theorem 4.3, we will verify two important theorems and two lemmas.

4.1. *theorem*. The power series of the approximate increment of  $K_n$ , even of the  $k_n$  auxiliary step, in the unmodified R. C. N. method given by the formulas (4.1)—(4.2), contains all those, and only all those terms, inclusive, the  $n$ -th degree which occur in the power series of  $\Delta y$  (the exact increment) Proof: The power series of the increment  $k_2$  has the form

$$k_2 = hf + h^2 C_1^{(1)} Df + \frac{h^3}{2!} C_1^{(1)2} D^2 f + \dots + \frac{h^{l+1}}{l!} C_1^{(1)l} D^l f + \dots \quad (4.5)$$

by reason of the formula (31.2). Hence it can immediately be seen that the power series of  $(k_2 - k_1)$  is of  $\beta$  type, in which all the terms, inclusive the quadratic ones, are contained which occur in the expansion of  $(\Delta y - hf)$ , too. By reason of the lemmas 32.1 and 32.2,  $k_3$  contains only such, and inclusive the third partial sum, all such terms which occur in the expansion of  $\Delta y$ . The theorem will be verified by means of general induction. We suppose that the theorem is already verified in case of  $n = 1; 2; \dots s$ ; . Consequently, the sum

$$C_2^{(s)}(k_2 - k_1) + C_3^{(s)}(k_3 - k_1) + \dots + C_s^{(s)}(k_s - k_1)$$

has an expansion of  $\beta$  type, that contains, inclusive, the terms of  $s$ -th degree all terms which occur in the power series of  $(\Delta y - hf)$ . So by reason of the lemmas 31.1—31.2 the propositions hold for  $k_{s+1}$  too. This completes the proof of the theorem.

4.2. *Lemma.* The power series of the difference between the approximate increment  $K_t$  in the R. C. N. method modified with the formulas (4.3)—(4.4) and between  $hf$ , is of  $\beta$  type.

This lemma follows immediately by means of similar mathematical induction with full knowledge of the lemmas 31.1 and 32.3.

4.3. *Lemma.* The coefficients of the  $h^l D^{l-1} f$  formed terms in the approximate increment of  $K_t$  in the modified R. C. N. method given by the formulas (4.3)—(4.4) contains only the parameters  $c_1^{(l)}$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) and  $C_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ), these parameters are absolutely independent of one another.

*Proof:* The first part of the proposition follows from the formula (31.2). It can be immediately seen by means of mathematical induction that the coefficient of the  $h^l D^{l-1} f$  formed term in the power series of  $\Delta y$  is exactly  $\frac{1}{l!}$ , and so by reason of (31.2), the system of equations

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + \dots + C_n &= 1 \\ C_2 \cdot c_1^{(2)} + C_3 c_1^{(3)} + \dots &= \frac{1}{2} \\ C_2 \cdot c_1^{(2)^2} + C_3 c_1^{(3)^2} + \dots &= \frac{1}{3} \\ \vdots & \\ C_2 [c_1^{(2)}]^r + \dots + C_n [c_1^{(n)}]^r &= \frac{1}{r+1} \end{aligned} \quad (4.6)$$

By reason of the well-known properties of the Van-der-Monde matrix also follows the complete independency. The direct consequence of this lemma is the

4.1. *Corollary.* In the modified R. C. N. method of  $n$ -th degree there occur at least  $\left[ \frac{n+1}{2} \right]$  auxiliary steps of  $k_s$  type (used in the unmodified method).

The  $k_1$  auxiliary step gives one, all the others give two independent parameters by which the equations (4.6) can be satisfied. If the method is of  $n$ -th degree the number of the equations is exactly  $n$ .

4.4. *Theorem.* Let

$$k = hf[x_0 + \alpha_0; y_0 + \alpha_0 f + \beta_0] \quad (4.7)$$

where  $\alpha_0$  is an expression of optional  $\alpha$  type, and  $\beta_0$  is an expression of such  $\beta$  type the expansion of which contains all terms inclusive, the  $n \geq 2$ -th degree

occurring in  $(\Delta y - hf)$ . Let moreover  $k_i^{(1)}$  an optional auxiliary step of the modified R. C. N. method. The expansion of  $k_i^{(1)}$  starts as follows

$$k_i^{(1)} = hf_y + \dots \quad (4.8)$$

In this case

$$K = D(k - hf) + E k_i^{(1)}(k - hf) + F k_i^{(1)^2}(k - hf) + \dots + G k_i^{(1)^s}(k - hf) + \dots \quad (4.9)$$

is an expression of  $\beta$  type, the series of which contains all terms inclusive, the  $(n + 2)$ -th degree occurring in  $(\Delta y - hf)$ .

Proof: By reason of the lemmas 32.1 and 32.3 it follows directly that  $K$  is really an expression of  $\beta$  type. On the other hand, by reason of the lemma 32.2, it follows that every term of  $(\Delta y - hf)$  inclusive the  $(n + 1)$ -th degree occurs. Let us now consider an optional term of  $(n + 2)$ -th degree of  $\Delta y$  e. g. the term

$$h^{n+2} \cdot \prod_{m=1}^{p_i} D^{k_m^{(i)}} \frac{\partial^{l_m^{(i)}} f}{\partial y^m} \prod_{M=1}^{q_i} D^{K_M^{(i)}} \quad (4.10)$$

If  $l_1^{(i)} \geq 2$ , than we can verify, in the same way as in the proof of the lemma 32.2, that in  $K$  occur a term like (4.10). Then the factor group reduced according to (32.20\*) is to be divided at least into two factors, so that no factor can be of higher degree than the  $n$ -th. These factors necessarily occur in the expansion of  $\beta^{l_1^{(i)}}$  [See formula (3.23)]. If  $l_1^{(i)} = 1$ , but  $k_1^{(i)} \geq 1$ , then (32.20\*) is a single factor in the expansion of  $\beta$ , but it occurs surely, because (32.20\*) is at most of  $n$ -th degree. As the indexing was arbitrary, we verified the occurrence of (4.10) in  $K$  in all those cases if one could find such  $1 \leq m \leq p_i$  to which

$$k_m^{(i)} + l_m^{(i)} \geq 2 \quad (4.11)$$

holds. After this we have only to verify the occurrence of

$$h^{n+2} (f_y)^{p_i} D^{n+1-p_i} f, \quad (4.12)$$

resp.,

$$h^{n+2} D^{n+1} f \quad (4.13)$$

in  $K$ , because the condition (4.11) being out of question,  $\Delta y$  may contain the terms formed like (4.12), resp. (4.13) according to the theorem 2.1. But the terms formed like (4.12) will surely occur in the term

$$[k_i^{(1)}]^{p_i} (k - hf) \quad (4.14)$$



of  $K$ , because  $(k - hf)$  contains every term of  $(\Delta y - hf)$  at the most of  $(n + 1)$ -th degree, so specially  $h^{n+2-p_i} D^{n+1-p_i} f$  ( $p_i = 1, 2, \dots$ ) too. One can immediately read from the formula (31.1) that in case of  $\alpha_0 = 0$   $K$  contains a term like (4.13). This completes the proof of our theorem.

**4.2. Corollary.** The power series of the approximate increment of  $K_i$ , given by the formulas (4.3)—(4.4), contains every term of  $\Delta y$ , inclusive the  $n$ -th degree, if  $K_i$  contains at least  $\left[ \frac{n+1}{2} \right]$  auxiliary steps of  $k_i$ , and at least one of  $k_i^{(1)}$  type. The demonstration can be made by mathematical induction — like that of the theorem 4.1, but using the theorem 4.4. Now the theorem 4.5 will be proved as follows.

The demonstration is based on the fact that the unmodified R. C. N. method given by the formulas (4.1)—(4.2) is the special case of the modified R. C. N. method given by the formulas (4.3)—(4.4), in that meaning that if certain parameters vanish in the latter one, we get the former. Consequently, if the theorem 4.1 holds for the unmodified R. C. N. method, it rather holds for the modified one, for the system of equations for parameters has surely that special solution-system, which we found presumed — in the special case. Now the so-called Eulerian broken-line method is a special case of the unmodified R. C. N. method — that is, if the sequence  $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}, \dots; C_1^{(n)}$  is chosen to be the multiple of  $\frac{h}{n}$  successively,  $C_1^{(k)}$  ( $i = 2, 3, \dots k; k = 2, 3, \dots n$ )

and  $C_i$  are chosen to be equal to  $\frac{h}{n}$ . From this it follows that the theorem 4.1 holds for the unmodified R. C. N. method; if this statement were not true, that is, there would exist such a degree denoted by  $\nu_0$ , for which the system of equations (considering it only until the  $\nu_0$ -th power) would possess a contradict for any unmodified R. C. N. method with the auxiliary steps of a number  $n$ , no matter how great, then consequently we could find always, choosing the step-number  $n$  and the related parameter-system no matter how a set of the equations (21.1) which satisfies the strict conditions related to the function  $f(x, y)$ , and making a step by means of the chosen R. C. N. method, the error would have a least limit  $H(\nu_0; K; h)$ ;  $H$  is independent of  $n$ . (That is, choosing any parameter group, there is a difference between the derivatives not of higher order than  $\nu_0$ : e. g. the  $\nu_1$ -th, in the expansion of the approximate and of the exact solution, in consequence of the assumed contradiction. Choosing a function the derivatives of which are small in absolute value, except the  $\nu_1$ -th, and constructing the differential equation of (21.1) type, according to the assumptions, the error of this equation will be over the limit  $H$ .) But this leads to contradiction, because the Eulerian broken-line method, as a special R. C. N. method assures, in case of sufficient high step number, the existence of such a parameter group, by which the



error in the set of equations (21.1) satisfying the above-mentioned conditions to  $f(x, y)$ , assures uniformly an arbitrarily small e.g.  $\frac{H}{2}$  limit.

This completes the proof of our theorem; but we wish to mention that in the third publication of this theme the theorem 4.5 will be proved in a more strict form.

## 5. §. Examples

In the followings, we want to point out the practical "planning" of certain formulas of the modified R. C. N. method, and the practical method for the evaluation of the required parameter system. Moreover, we make a comparison between the obtained formula and the usual R. C. N. method, by means of a numerical example. It is to be emphasized that the formula (31.2) of the lemma 31.1 and the formula (32.6) were not given only for proving the mentioned theorems, but by using this formulas, the expansion serving for evaluation of the parameters can be made in an almost automatic way in practice too.

51. *Formulas of fifth degree in five points.* We give some simpler methods of fifth, resp., sixth degree, by means of parameters as follows. We will not enter into lengthy, tedious numerical evaluation details but we only notice, that it is advisable to outline the equations. This goes to show how the system of equations can be divided into groups.

The formulas of fifth degree in five points :

a)

$$k_1 = hf(x_0, y_0) \quad (51.1)$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{4}{5}h; y_0 + \frac{4}{5}k_1\right) \quad (51.2)$$

$$k'_1 = hf_y[x_0; y_0 + 3(k_2 - k_1)] \quad (51.3)$$

$$k_3 = hf\left[x_0 + \frac{1}{3}h; y_0 + \frac{1}{24}k_1 + \frac{7}{24}k_2\right] \quad (51.4)$$

$$k_4 = hf\left[x_0 + h; y_0 - \frac{37}{8}k_1 + \frac{27}{56}k_2 + \frac{36}{7}k_3 - \frac{1}{2}k'_1(k_2 - k_1)\right] \quad (51.5)$$

$$\begin{aligned} k = & \frac{5}{48}k_1 + \frac{125}{336}k_2 + \frac{27}{56}k_3 + \frac{1}{24}k_4 - \frac{29}{336}k'_1(k_2 - k_1) + \\ & + \frac{3}{28}k'_1(k_3 - k_1) - \frac{25}{336}k_1'^2(k_2 - k_1) + \frac{3}{28}k_1'^2(k_3 - k_1) - \\ & - \frac{1}{48}k_1'^3(k_2 - k_1) \end{aligned} \quad (51.6)$$

b)

$$k_1 = hf(x_0, y_0) \quad (51.7)$$

$$k_2 = hf[x_0 + \alpha_2 h; y_0 + \alpha_2 k_1] \quad (51.8)$$

$$k'_3 = hf_y[x_0 + \alpha_3 h; y_0 + \alpha_3 k_1] \quad (51.9)$$

$$k'_4 = hf_y[x_0 + \alpha_4 h; y_0 + \alpha_{41} k_1 + \alpha_{42} k_2] \quad (51.10)$$

$$k_5 = hf[x_0 + \alpha_5 h + \beta_{51} h k'_3; y_0 + \alpha_{51} k_1 + \alpha_{52} k_2 + \beta_{51} k_1 k'_3] \quad (51.11)$$

$$\begin{aligned} k = & R_1 k_1 + R_2 k_2 + R_5 k_5 + R_3 (k_2 - k_1) k'_3 + R_4 (k_2 - k_1) k'_1 + \\ & + R_6 (k_5 - k_1) k'_3 + R_7 (k_5 - k_1) k'_4 + R_5 (k_2 - k_1) k'^2_3 + \\ & + R_{10} (k_2 - k_1) k'_4 + R_{11} (k_5 - k_1) k'^2_3 + R_{13} (k_5 - k_1) k'^2_4 + \\ & + R_{14} (k_2 - k_1) k'^3_3; \end{aligned} \quad (51.12)$$

Where

$\alpha_2 = 0,35505103$	$R_1 = 0,11111111$
$\alpha_3 = \frac{1}{3} = 0,33333333$	$R_2 = 0,51248580$
$\alpha_4 = 0,66666667$	$R_3 = 0,46701860$
$\alpha_5 = 0,84494897$	$R_4 = 0,33113104$
$\alpha_{41} = 0,91990313$	$R_5 = 0,37640309$
$\alpha_{42} = -0,25323646$	$R_6 = 0,21161946$
$\alpha_{51} = 0,82731251$	$R_7 = -0,46810571$
$\alpha_{52} = 0,01763646$	$R_8 = R_{10} = -0,19873047$
$\beta_{51} = 0,25938934$	$R_{11} = 0,04907363$
	$R_{13} = 0,16725358$
	$R_{14} = -0,13838645$

In both case, we planned the formula as follows. By reason of the formulas (22.1—7) we evaluated the minimum parameter-number in case of formula of fifth order (as many as the number of terms in the first five derivatives, that is:  $1 + 1 + 2 + 4 + 8 = 16$ ). Moreover, by reason of formulas (32.20)—(32.31) we evaluated, that at least, how many steps of  $k_i = k_i^{(0)}$  type are required to have all terms occurring in  $\Delta y$  till the fifth degree. As there exist at least 3, the practicable solution is 3 of  $k_i^{(0)}$  and so many  $k_i^{(1)}$  steps which can assure the

occurring of 16 parameters. So we got the formula b) (because we had to include at least two  $k_i^{(1)}$ ). First we included all possible parameters — which can theoretically occur considering the first five powers of the sum —, and when the equation was written down, we chose arbitrarily so many and such parameters as to solve the equation in the simplest way. The procedure is the same in case of a), resp., generally.

52. *A numerical example.* We show, for comparison, in case of the equation

$$y' = y - \frac{2x}{y}; \quad y(0) = 1$$

a) by  $h = 1$  step

the several solutions, evaluated by means of  
1° R. C. N. method of second degree.

$$y(1) \cong 1,833$$

2° the well-known R. C. N. method of fourth degree

$$y(1) \cong 1,772$$

3° the method of fifth degree shown in a)

$$y(1) \cong 1,744$$

4° the method of fifth degree shown in b)

$$y(1) \cong 1,735$$

and 5° integration. The exact solution is  $y = \sqrt{1+2x}$

$$y(1) \cong 1,732$$

## References

1. KUTTA, W.: Z. Math. u. Phys. **46** (1901) 435—453.
2. NYSTRÖM, E. J.: Über die numerische Integration von Differenzialgleichungen. Acta Soc. Sci. fennicae Bd. **50** Nr. 13. 1—55 (1925).
3. RUNGE, C., KÖNIG, H.: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin, Springer, 1924.

### Summary

We prove that approaching the solution of the equation

$$y' = f(x, y)$$

by means of the Runge—Kutta method, this method can be of optional order of degree, supposing that we have evaluated as many auxiliary increments, as is sufficient. We show that using the partial derivatives of function  $f$ , in respect to the dependent variable at the evaluation of the auxiliary increments, the method can again be of optional order of degree, but the number of the points rapidly decreases at which the function-value, resp., its derivatives are to be evaluated. We illustrate the above-mentioned by examples.

T. FREY, Budapest XI. Budafoki út 4—6, Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1958. IV. 7. — Terjedelem: 10 (A/5) ív, 76 ábra

---

Akadémiai Nyomda, Budapest — 45238/58 — Felelős vezető: Bernát György





Instruments for laboratories and research institutes

Measuring instruments for the textile industry

Instruments for power-plant control

Medical and surgical instruments

Medical and surgical apparatus

Electric measuring instruments

Medical and dental furniture

Electro-medical apparatus

Electronic instruments

Veterinary instruments

Geodetic instruments

Dental supplies

A m p o u l e s

*Exporters :*

**METRIMPEX**

Hungarian Trading Company  
for Instruments

Letters : Budapest 62.

P. O. B. 202

Telegrams : Instrument  
Budapest

*Metrimer*



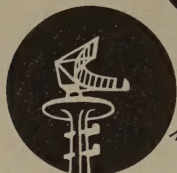
# *Electronic measuring instruments for all branches of science and industry*



Radio-technical measuring  
instruments



Telephone and telecommuni-  
cation measuring instruments



Micro-wave measuring instruments



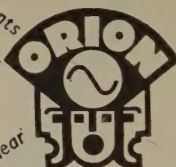
Measuring instruments for indust-  
rial and scientific applications



Elements for automatic control



Measuring instruments for nuclear  
physics



EXPORTERS:



## **METRIMPEX**

**HUNGARIAN TRADING COMPANY FOR INSTRUMENTS**  
**LETTERS: BUDAPEST 62, P. O. B. 202.**  
**TELEGRAMS: INSTRUMENT BUDAPEST**

**When visiting the World Exhibition an Brussels pay a visit to our informations  
bureau in the Hungarian pavilion**



*A* Budapesti Műszaki Egyetem Periodica Polytechnica címen idegen nyelvű tudományos folyóiratot indított. A folyóirat három sorozatban — vegyészeti, villamossági, valamint gépész- és általános mérnöki sorozatban — jelenik meg, évente négyszer, sorozatonként egy-egy kötetben. Az egyes kötetek terjedelme 14—18 ív.

A Periodica Polytechnicában megjelenő tanulmányok szerzői az Egyetem tanári karából és tudományos dolgozóiból kerülnek ki. Főszerkesztő Dr. Csűrös Zoltán egyetemi tanár, akadémikus.

A folyóirat előfizetési ára sorozatonként és kötetenként 50,— Ft. Megrendelhető az Akadémiai Kiadónál (Budapest 62, Postafiók 440. NB. egyszámlaszám : 05-915-111,44), a külföld számára pedig a Kultúra Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalatnál (Bp. 62, Postafiók 149. NB. egyszámlaszám : 43-790-057-121), illetve a vállalat külföldi képviselőinél és bizományosainál.

## I N D E X

BENEDIKT, O.: Die neue elektrische Maschine »Autolyne«	49
RÁCZ, I.: Transiente Vorgänge in Doppelkäfigmotoren, II.	91
CSÁKI, F.: Some Remarks concerning the Quick-response Overexcitation of Synchronous Generators .....	111
HREHUSS, G.—NESZMÉLYI, A.—SIMONYI, K.: A Fast Neutron Time-of-Flight Spectrometer .....	131
FREY, T.: On Improvement of the Runge—Kutta—Nyström Method, I. ....	141